STRUKTURELLE EIGENSCHAFTEN TRIVALENTER FUNKTOREN

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie

in der

Abteilung für Philosophie, Pädagogik, Psychologie

der

RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

vorgelegt von:

Sigrid Bachmann

1982

STRUKTURELLE EIGENSCHAFTEN TRIVALENTER FUNKTOREN

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie

in der

Abteilung für Philosophie, Pädagogik, Psychologie

der

RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

vorgelegt von:

Sigrid Bachmann

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät der
Abteilung für Philosophie, Pädagogik, Psychologie
der RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Referent: Prof.Dr.Albert Menne

Korreferent: Prof.Dr.Gert König

Tag der mündlichen Prüfung: 24.Februar 1982

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	
1.1	Themenstellung	1
1.2	Zur Vorgeschichte	1
1.3	Darstellung grundsätzlicher Möglichkeiten der Erweiterung des bivalenten Kalküls auf polyvalente Systeme	4
1.4	Darlegung einiger bekannter dreiwertiger Systeme	8
1.5	Anmerkungen zur Arbeitsweise	10
1.6	Gedankengang in den einzelnen Kapiteln des Hauptteils	11
2.1	Untersuchung der Frage, ob das dreiwertige System ein zum zweiwertigen System isomorphes Untersystem enthält	12
	2.1.1 Überlegung zur Aufstellung eines Systems mit N_1 als Negator	12
	2.1.2 Untersuchung der Existenz eines Systems mit Negator N_2	13
	2.1.3 Überprüfung der Konstruktionsmöglichkeit eines Systems mit Negator N_3	13
2.2	Konstruktion von Implikatoren mit festen Eckwerten unter Beibehaltung der strukturellen Eigenschaften	14
	2.2.1 Untersuchung der reflexiven Implikatoren	14
	2.2.2 Untersuchung der Transitivitätsgesetze	19
	2.2.3 Konstruktion von Implikatoren, die die Exportationsgesetze erfüllen	53
	2.2.4 Erzeugung von Funktoren, für die die Abtrennungsregel gilt	60
2.3	Erstellung von Implikatoren, die die Transitivitätsgesetze erfüllen, aber nicht notwendig Analoga 1.Art sind	63
	2.3.1 Untersuchung der Implikatoren mit $C(0,0) = 1$	63
	2.3.2 Betrachtung der Funktoren für $C(0,0) = 2$	77
2.4	Erzeugung trivalenter Funktoren, die den Exportationsgesetzen genügen, ohne Analoga 1.Art zu sein	83
	2.4.1 Untersuchung für $C(2,2) = 2$	83
	2.4.2 Entwicklung der Funktoren mit $C(2,2) = 1$	85
	2.4.3 Betrachtung der Implikatoren mit $C(2,2) = 0$	86
2.5	Konstruktion von Implikatoren, die der Abtrennungsregel genügen, aber keine Analoga 1.Art sind	89
	2.5.1 Untersuchung der Funktoren mit $C(2,2) = 0$	89
	2.5.2 Betrachtung der Funktoren für $C(2,2) = 1$	90
	2.5.3 Ermittlung der Implikatoren mit $C(2,2) = 2$	92

3.1 Vergleich der konstruierten Implikatoren mit denen bekannter dreiwertiger Systeme 94

3.2 Analyse der Ergebnisse der Kapitel 2.3 bis 2.5 95

3.3 Beispiel einer Untersuchung mit einem Zyklator als Negator 96

4. Zusammenfassung 101

Anmerkungen 104

Literaturverzeichnis 106

Lebenslauf

V o r w o r t

Mit Genehmigung der Prüfungskommission wurde die Arbeit vervielfältigt ohne den Anhang, der die im Text erwähnten ausführlichen Beweise und umfangreichen Geltungswert-Matrizenrechnungen enthielt.

Ein Großteil der in der Arbeit behandelten Problematik hätte sich statt durch solche Geltungswert-Rechnungen auch mit algebraischen Methoden, insbesondere mit Hilfe der Verbandstheorie, bearbeiten lassen.

Für den Mathematiker wäre das vielleicht der "elegantere" Weg gewesen, doch ich habe in der vorliegenden Untersuchung den langwierigeren und mühsameren Weg der Matrizen-Rechnung beschritten, da es mir darauf ankam, nicht nur quantitative Aussagen darüber zu machen, wie viele der betrachteten Funktoren jeweils die entsprechenden Gesetze erfüllen, sondern gleichzeitig während des Beweisweges zu erkennen, welche Geltungswert-Kombinationen sich gegenseitig ausschließen. Darüberhinaus ergab sich so die Möglichkeit festzustellen, wie ein Konjunktor bzw. ein Negator jeweils abgeändert werden muß, damit er zusammen mit dem vorliegenden Implikator das fragliche Gesetz erfüllen kann.

1.1 Themenstellung

Das bearbeitete Thema gehört dem Gebiet der Logik an, wobei Logik hier als Lehre von der Folgerichtigkeit verstanden werden soll. Folgerichtigkeit bedeutet, daß die Funktoren in Obereinstimmung mit ihren strukturellen Eigenschaften verwandt werden. Daher sollen in dieser Arbeit die strukturellen Eigenschaften dreiwertiger Funktoren untersucht werden.

Im zweiwertigen System nehmen folgende Funktoren eine zentrale Stellung ein: Implikator, Konjunktor und Disjunktor als dyadische Funktoren, der Negator als monadischer Funktor. Diese Funktoren bilden auch die Grundlage in den dreiwertigen Systemen von Lukasiewicz, Post, Bochvar und Kleene.

Ich werde mich hauptsächlich mit den strukturellen Eigenschaften dreiwertiger Implikatoren beschäftigen. Dabei gehört über die im Zweiwertigen gültigen Definitionsgleichungen zu je einem Implikator jeweils ein Konjunktor und ein Disjunktor.

Ein Vorteil der Kenntnis struktureller Eigenschaften trivalenter Funktoren besteht darin, daß man Theoreme mit Hilfe der gültigen Regeln beweisen kann und man nicht den Weg über eine aufwendige Geltungswertuntersuchung gehen muß. (Im Zweiwertigen wird z.B. für Beweise häufig die Abtrennungsregel benutzt.) Es soll daher untersucht werden, welche Gesetze im dreiwertigen System Gültigkeit haben und in wieweit eine Übertragung der im Zweiwertigen gültigen Gesetze auf polyvalente Systeme möglich ist.

1.2 Zur Vorgeschichte

Schon in der Antike ist das Prinzip der Zweiwertigkeit: 'eine Aussage ist entweder wahr oder falsch' umstritten gewesen. Am Beispiel: 'Die Seeschlacht findet morgen statt' [1] hat Aristoteles erläutert, daß es eine Klasse von Sätzen, nämlich Aussagen über zukünftige kontingente Ereignisse gäbe, bei denen man heute nicht entscheiden könne, ob sie wahr oder falsch seien.

Zu dieser Zeit haben die Deterministen streng auf dem Prinzip der Bivalenz bestanden, da sie den dritten 'unbestimmten' Zustand abgelehnt haben. Zu diesen Deterministen haben die Stoiker gezählt, z.B.

Chrysippos. Demzufolge widersprachen Indeterministen wie die Epikureer diesem Prinzip.

Im Mittelalter ist von Duns Scotus und von William von Ockham neben der propositio vera und der propositio falsa die Existenz einer dritten propositio neutra angenommen worden. Der Anschauung von der Unbestimmtheit zukünftiger Ereignisse ist jedoch sowohl von islamischer als auch von christlicher Seite aus widersprochen worden, da dies zu theologischen Problemen führte.

Neben der Unbestimmtheit von zukünftigen Ereignissen boten die Modalitäten eine Anregung zur Errichtung mehrwertiger Logiken. Die sog. alethischen Modalitäten sind bereits im Altertum eingeführt worden:

notwendig falsch
tatsächlich falsch
tatsächlich wahr
notwendig wahr.

Später sind ähnliche Einteilungen durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt:

mit Sicherheit falsch
wahrscheinlich falsch
unbestimmt
wahrscheinlich wahr
mit Sicherheit wahr.

Durch diese Modalitäten angeregt, hat Hugh Mac Coll (1837-1909) die 'Logik der drei Dimensionen' [2] vertreten und ist so zu einem Vorreiter derjenigen geworden, die versucht haben, mehrwertige Logiken nach den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu konstruieren.

Der Amerikaner Charles Sanders Peirce (1839-1914) hat 1902 in seinem Aufsatz 'Minute Logic' die Möglichkeit einer 'dreiteiligen Mathematik' angegeben, die auf einer dreiwertigen Logik basiert.[3]

In den Jahren 1910 bis 1914 hat der Russe Vasil'ev in vier Veröffentlichungen seine Ideen über eine 'nichtaristotelische Logik' dargestellt.[4] Vasil'ev gehörte damals als Professor der Kazan Universität an. Dort lehrte auch der Mathematiker Lobatschewski, der durch Verwerfung des Parallelenaxioms eine von ihm sog. 'imaginäre Geometrie' geschaffen hat. Diese Geometrie wurde dann auch als 'nicht-euklidische'

Geometrie bekannt, da das Parallelenaxiom ein Grundaxiom der euklidischen Geometrie ist. Damit ergaben sich statt der beiden bisher möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden zueinander drei mögliche Beziehungen. Die Aussagen: zwei Geraden sind parallel, und zwei Geraden haben keinen Schnittpunkt, sind nur in der euklidischen, nicht aber in der imaginären Geometrie Lobatschewskis zueinander äquivalent.

Entsprechend ging Vasil'ev vor, er eliminierte das Nichtwiderspruchsprinzip aus seiner Logik und schuf so eine 'imaginäre Logik' oder auch 'nicht-aristotelische Logik'.[5] Damit ergaben sich neben den Wahrheitswerten wahr und falsch noch weitere mögliche Geltungswerte. Vasil'ev nahm zunächst drei Geltungswerte, später dann ganz allgemein n Geltungswerte an. Da Vasil'ev in Russisch publizierte, wurden seine Schriften kaum bekannt, und seine Ideen setzten sich nicht durch. Zudem entwickelte er keinen mehrwertigen Kalkül.[6]

1916 hat der Amerikaner Edwin Guthrie einige der Hauptideen angegeben, die später den Anstoß zur Entwicklung der mehrwertigen Logik gegeben haben, er hat diese jedoch nicht ausgeführt.[7]

1920 begründeten dann unabhängig voneinander der Pole Jan Lukasiewicz und der Amerikaner Emil L.Post die mehrwertige Logik.

Lukasiewicz ist davon ausgegangen, die Modallogik zu formalisieren. Er hat sein dreiwertiges System am 19.Juni 1920 in Lwów in einem Vortrag vor der polnischen philosophischen Gesellschaft vorgestellt.[8]

Post hingegen ist von einer formalen Erweiterung der zweiwertigen Logik ausgegangen. Er hat in seiner 1920 an der Columbia Universität verfaßten Doktorarbeit Systeme mit einer beliebigen Zahl von Geltungswerten konstruiert.[9] Nach der Veröffentlichung seiner Entdeckungen im Jahre 1921 hat sich Post nie wieder mit diesem Gebiet beschäftigt.

In den folgenden Jahren sind mehrwertige Logiksysteme untersucht und nach verschiedenen Richtungen hin ausgebaut worden. So ist z.B. 1931 das dreiwertige System von Lukasiewicz durch seinen Landsmann Wajsberg axiomatisiert worden.[10]

Von den vielen Arbeiten, die danach auf dem Gebiet der mehrwertigen Logik geschrieben worden sind, sollen nur das fundamentale Werk von Rosser und Turquette [11] und die ausführliche Zusammenstellung von Nicholas Rescher [12] erwähnt werden.

1.3 Darstellung grundsätzlicher Möglichkeiten der Erweiterung des bivalenten Kalküls auf polyvalente Systeme

In der klassischen zweiwertigen Logik versteht man unter einer Aussage einen Satz, von dem entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist. Dabei verwende ich die Bezeichnungen p, q, r für Aussagenvariable. Als Wahrheitswerte verwende ich 1 (für wahr) und 0 (für falsch), so daß M = {0,1} die Menge der möglichen Wahrheitswerte wird.

Def. 1.3.1: Unter der Produktmenge
$M_1 x M_2 x \ldots x M_n$ der Mengen $M_1, \ldots, M_n$
versteht man die Menge aller geordneten Paare
$(a_1, \ldots, a_n)$, für die $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2, \ldots a_n \in M_n$.
Unter M^n versteht man das Produkt $\underbrace{MxMx\ldots xM}_{n\text{-mal}}$

Def. 1.3.2: Unter einem Funktor f versteht man eine Zuordnung, bei der jedem Element aus M^n genau ein Element aus M zugeordnet wird.

Für n=1 heißt der Funktor f monadisch, für n=2 dyadisch, für n=3 triadisch, usw.

Es gibt im Zweiwertigen vier monadische Funktoren:

	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

f_3 wird als Negator N bezeichnet.
Bei den dyadischen Funktoren besteht der Definitionsbereich aus vier Paaren von Wahrheitswerten. Jedem der vier Paare wird der Wahrheitswert 1 bzw. 0 zugeordnet. Diese 2^4 Möglichkeiten führen damit zu 16 verschiedenen dyadischen Wahrheitswertfunktoren im Zweiwertigen.

Der Konjunktor K ist durch folgende Zuordnung festgelegt:

(p,q)	Kpq
(1,1)	1
(1,0)	0
(0,1)	0
(0,0)	0

in Matrixdarstellung:

K	1	0
1	1	0
0	0	0

Weiterhin gilt:

Disjunktor D:

D	1	0
1	1	1
0	1	0

Implikator C:

C	1	0
1	1	0
0	1	1

Wichtige strukturelle Eigenschaften des zweiwertigen Implikators sind:

1.3.3 Reflexivität: ⊢Cpp

1.3.4 Transitivität:

1.3.4.1 ⊢CCpqCCqrCpr

1.3.4.2 ⊢CKCpqCqrCpr

1.3.5 Exportationsgesetze:

1.3.5.1 ⊢CKpqr ≡ CpCqr

1.3.5.2 ⊢CKpqr ≡ CqCpr

Dabei bedeutet '≡', daß sich bei gleicher Wahrheitswertbelegung von p, q und r auf der linken und rechten Seite unter den Hauptfunktoren jeweils derselbe Wert ergibt.

1.3.6 weitere Eigenschaft:

Es ergibt sich immer der Wert 1,

1.3.6.1 wenn an 1. Stelle der Wert 0 steht ('ex falso sequitur quodlibet').

oder

1.3.6.2 wenn an 2. Stelle der Wert 1 steht ('verum sequitur ex quolibet').

1.3.7 Das Implikans ist nicht stärker als das Implikat. (Dabei wird im Ausdruck Cpq das Vorderglied p als Implikans, das Hinterglied q als Implikat bezeichnet.)

1.3.8 ⊣ Cpq≡Cqp, d.h. der Implikator ist nicht symmetrisch.

1.3.9 C K C pq p q modus ponens

Die zweiwertige klassische Logik läßt sich nun zur mehrwertigen Logik erweitern, indem man für die Menge M weitere Geltungswerte zuläßt.

Will man in der n-wertigen Logik Werte hinzufügen, so kann man zwischen 0 und 1 die Werte $\frac{1}{n-1}$, $\frac{2}{n-1}$,..., $\frac{n-2}{n-1}$ schalten. Um aber Brüche zu vermeiden, verwende ich M = {0,1,...,n-1}. 0 entspricht dabei dem Wert falsch, n-1 dem Wert wahr und 1,...,n-2 den dazwischenliegenden Geltungswerten. Es ergeben sich n^n monadische und n^{n^2} dyadische, n^{n^3} triadische Funktoren, usw.

Wenn man einen n-wertigen Implikator definieren will, kann man auf verschiedene Arten vorgehen:
Man ersetzt in den Eckwerten die 1 durch n-1, die 0 behält man bei. Dann erhält man folgende Tabelle:

zweiwertig:

C	1	0
1	1	0
0	1	1

n-wertig:

C	n-1	...	0
n-1	n-1	...	0
⋮			
0	n-1		n-1

Erweitert man einen dyadischen zweiwertigen Funktor auf diese Weise, so erhält man n^{n^2-4} verschiedene Möglichkeiten. Diese Art der Erweiterung wird bei Rutz als Analogie 1.Art bezeichnet.[1)]

Für die Analogie 2. und 3.Art teilt Rutz die Menge der n-wertigen Geltungswerte in zwei nichtleere Teilmengen T_1 = {0,..., a} $0 \leq a < n-1$ und $T_2 = M \setminus T_1$ ein. Die Elemente von T_1 heißen nichtausgezeichnete Werte, die Elemente von T_2 ausgezeichnet. Als Vorschrift der Erweiterung eines zweiwertigen Funktors teilt er die Matrizen folgendermaßen auf:

	n-1...a+1	a... 0
n-1 ⋮ a+1	I	II
a ⋮ 0	III	IV

	1	0
1	I	II
0	III	IV

Steht an einer Stelle der zweiwertigen Matrix eine 1, so muß an den entsprechenden Stellen in der n-wertigen Matrix ein ausgezeichneter Wert stehen, andernfalls ein nichtausgezeichneter Wert. Ein so konstruierter Funktor wird als Analogon 2.Art bezeichnet. Erfüllt ein Funktor sowohl die Bedingung des Analogons 1.Art als auch die des

Analogons 2.Art, so heißt er Analogon 3.Art.

Eine andere Möglichkeit der Erweiterung besteht darin, eine Gleichung zu finden, nach der die Zuordnung im Zweiwertigen erfolgt und diese dann in ein n-wertiges System zu übertragen. Dazu zwei Beispiele:
Beispiel 1.3.10:
Man könnte für den Konjunktor K mit

K	1	0
1	1	0
0	0	0

aufstellen:

$$Kpq = p \cdot q \bmod 2.$$

Im n-wertigen System:

$$Kpq = p \cdot q \bmod n.$$

Man erhält z.B. für n = 4:

K	3	2	1	0
3	1	2	3	0
2	2	0	2	0
1	3	2	1	0
0	0	0	0	0

Man sieht, daß dieser Konjunktor auch symmetrisch ist, denn es gilt Kpq ≡Kqp, jedoch ist er kein Analogon 1.Art des zweiwertigen Konjunktors.
Beispiel 1.3.11:
Man definiert:

Kpq = min (p,q), dann ergibt sich für n = 4 :

K	3	2	1	0
3	3	2	1	0
2	2	2	1	0
1	1	1	1	0
0	0	0	0	0

Der so definierte Konjunktor ist ein Analogon 1.Art des zweiwertigen Konjunktors, außerdem für jede mögliche Zerlegung von M in T_1 und T_2 ein Analogon 2. und damit auch 3.Art.

Eine weitere mögliche Erweiterung eines zweiwertigen Funktors zu einem mehrwertigen Funktor ergibt sich, wenn man von den strukturellen Ei-

genschaften ausgeht: Die Betrachtung von Konjunktor und Disjunktor soll das Verfahren erläutern:
Der zweiwertige Konjunktor K ist symmetrisch und nach de Morgan durch

1.3.12 ⊦Apq ≡ NKNpNq

mit dem Disjunktor A verbunden. Konjunktor und Disjunktor sind außerdem distributiv zueinander, es gilt:

1.3.13 ⊦ApKqr ≡ KApqApr

1.3.14 ⊦KpAqr ≡ AKpqKpr.

Konjunktor und Disjunktor müssen nun so erweitert werden, daß 1.3.12 bis 14 im n-wertigen ebenfalls gelten, d.h., daß die strukturellen Eigenschaften beibehalten werden unabhängig davon, wie die Eckwerte gewählt sind. Außerdem ist die Frage zu untersuchen, ob sich eine Erweiterung so vornehmen läßt, daß sowohl die strukturellen Eigenschaften erhalten bleiben, als auch eine Analogie 1.Art vorliegt.

1.4 Darlegung einiger bekannter dreiwertiger Systeme

In diesem Abschnitt sollen die trivalenten Systeme von Lukasiewicz, Bochvar, Kleene und Post erläutert werden.

Den ersten drei Systemen ist die Wahl des Negators N gemeinsam:

p	Np
2	0
1	1
0	2

Es ist festzustellen, daß es sich hier um den einzigen Negator handelt, der ein Analogon erster Art des zweiwertigen Negators ist und gleichzeitig das zweiwertige Gesetz

⊦NNp ≡ p

beibehält.

Die Matrizen für die vier Funktoren: Konjunktor K, Disjunktor A, Implikator C und Äquivalentor E sehen folgendermaßen aus:
Lukasiewicz: [1)]

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

A	2	1	0
2	2	2	2
1	2	1	1
0	2	1	0

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	1
0	2	2	2

E	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	1
0	0	1	2

Bochvar:[2)]

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	0	1	0

A	2	1	0
2	2	1	2
1	1	1	1
0	2	1	0

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	2	1	2

F	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	0	1	2

Kleene:[3)]

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	0
0	0	0	0

A	2	1	0
2	2	2	2
1	2	1	1
0	2	1	0

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	1
0	2	2	2

E	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	0	1	2

Bei den drei Systemen sind die Funktoren so gewählt, daß die Eckwerte den zweiwertigen Werten entsprechen.

Bochvar füllt die fünf übrigen freien Werte alle durch den mittleren Geltungswert 1, Kleene hingegen behält die Gleichungen K(p,q)=min (p,q), A(p,q) = max (p,q), Cpq ≡ ANpq und Epq ≡ KCpqCqp bei. Beide erhalten dabei den gleichen Äquivalentor.

Lukasiewicz stimmt mit Kleene in der Wahl von K und A überein, der von ihm definierte Implikator jedoch ist im Unterschied zum Kleeneschen reflexiv, d.h. es gilt:⊦Cpp.

Von diesen drei Systemen unterscheidet sich das Postsche System dadurch wesentlich, daß außer beim Disjunktor die vier Eckwerte nicht entsprechend wie im Zweiwertigen gewählt werden, d.h., daß es sich bei seinen Funktoren nicht um Analoga 1.Art handelt.

Für den Negator wählt Post einen Zyklator, d.h. er ersetzt das zweiwertige Gesetz

$$\vdash NNp \equiv p$$

durch $\vdash NNNp \equiv p$.

Post's Negator wird durch folgende Tabelle beschrieben:

p	Np
2	1
1	0
0	2

Die vier dyadischen Funktoren haben folgende Matrizen:

K	2	1	0
2	0	0	1
1	0	2	1
0	1	1	1

A	2	1	0
2	2	2	2
1	2	1	1
0	2	1	0

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	1	0
0	2	2	2

E	2	1	0
2	0	0	0
1	0	2	1
0	0	1	0

4)

Auffällig ist hier die Übereinstimmung mit dem im Kleeneschen System und Lukasiewiczschen System gewählten Disjunktor A. Die anderen drei Funktoren gehen aus A durch die im Bivalenten gültigen Definitionsgleichungen hervor:

$$\vdash Kpq \equiv NANpNq$$
$$\vdash Cpq \equiv ANpq$$
$$\vdash Epq \equiv KCpqCqp \ .$$

Abschließend sei noch bemerkt, daß das Lukasiewiczsche System das einzige System ist, bei dem der Äquivalentor seine anschauliche Bedeutung beibehält, genau dann wahr zu werden, wenn im Vorder- und im Hinterglied derselbe Geltungswert steht.

1.5 Anmerkungen zur Arbeitsweise

In 1.3 wurden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, wie sich zweiwertige Funktoren in polyvalenten Systemen erweitern lassen. Die Überlegungen in dieser Arbeit sind so aufgebaut, daß bei der Erweiterung immer die Beibehaltung einer möglichst großen Zahl struktureller Eigenschaften angestrebt wird. Dabei werden zunächst Funktoren untersucht, die Analoga 1.Art des zweiwertigen Funktors sind, danach die anderen, die in den Eckwerten nicht mit den zweiwertigen Funktoren übereinstimmen, aber die strukturellen Eigenschaften beibehalten.

Bei der Untersuchung der dreiwertigen dyadischen Funktoren werden nicht jeweils alle $3^9 = 19\,683$ Funktoren daraufhin überprüft, ob sie die jeweilige Eigenschaft besitzen oder nicht, sondern es wird von der jeweiligen Eigenschaft ausgehend die Tabelle so aufgebaut, daß die Eigenschaft erfüllt wird. Dabei werden Annahmen über die Werte in der Tabelle gemacht, und aus der jeweiligen Geltungswertuntersuchung werden Schlüsse über die anderen Werte in der Tabelle gezogen.

Der Übersicht halber werden die Rechnungen, bei denen es eine Reihe von Unterfällen gibt, nicht im Hauptteil einzeln erörtert, sondern im Anhang angefügt.

1.6 Gedankengang in den einzelnen Kapiteln des Hauptteils

Die historischen Systeme, die im Abschnitt 1.4 dargestellt sind, zeigen, daß es zwei grundsätzlich unterschiedliche Möglichkeiten zur Erweiterung bivalenter Funktoren gibt. Man kann die Eckwerte dem bivalenten Funktor entsprechend wählen oder man operiert mit beliebigen Eckwerten. Diese beiden Ansätze werden in den folgenden Kapiteln weiter verfolgt.

Zunächst wird in Kapitel 2.1 untersucht, ob das dreiwertige System mit seinen 19 683 Funktoren ein zum zweiwertigen System isomorphes Untersystem aus 16 Funktoren enthält.

Der Abschnitt 2.2 untersucht den Ansatz, der auch die Systeme von Lukasiewicz, Bochvar und Kleene gelenkt hat, nämlich die zweiwertigen Eckwerte beizubehalten. Dabei werden die wesentlichen Eigenschaften des zweiwertigen Implikators der Reihe nach untersucht.

In den folgenden Abschnitten 2.3 bis 2.5 wird ähnlich wie im Postschen Ansatz von den analogen Eckwerten losgelöst nur auf die Gültigkeit der strukturellen Eigenschaften geachtet. Es werden dieselben Eigenschaften wie in Kapitel 2.2 untersucht.

2.1 Untersuchung der Frage, ob das dreiwertige System ein zum zweiwertigen System isomorphes Untersystem enthält

in dem gesuchten dreiwertigen System muß es einen monadischen Funktor geben, der zu dem zweiwertigen Negator korrespondiert und dessen strukturelle Eigenschaften besitzt. Eine Eigenschaft des zweiwertigen Negators N ist $\vdash$ NNp $\equiv$ p. Damit kommen von den 27 monadischen Funktoren, die für den Negator möglich sind, nur solche in Frage, die drei verschiedene Geltungswerte besitzen, von diesen drei Geltungswerten einen unverändert lassen und die anderen beiden untereinander vertauschen.
Das sind die folgenden Negatoren: N_1, N_2 und N_3

p	N_1p	N_2p	N_3p
2	2	1	0
1	0	2	1
0	1	0	2

2.1.1 Überlegung zur Aufstellung eines Systems mit N_1 als Negator

Das zweiwertige System besteht aus 16 dyadischen Funktoren. Da es in einem isomorphen System zu jedem zweiwertigen Funktor genau einen korrespondierenden Funktor geben muß, müßte das gesuchte System 16 dreiwertige Funktoren enthalten. Unter diesen 16 Funktoren müssten zwei Funktoren K und A vorkommen, die die strukturellen Eigenschaften des zweiwertigen Konjunktors und des zweiwertigen Disjunktors besitzen.
Für den Konjunktor gelten folgende Gesetze im Zweiwertigen:

2.1.1.1 $\vdash$ NKpNp

2.1.1.2 $\vdash$ Kpp $\equiv$ p .

Also muß wegen 2.1.1.1 gelten:

KpNp $\equiv$ 0 für jede Belegung von p ,

also KpN_1p, d.h. $K(2,2) = 0$.

Wegen 2.1.1.2 muß jedoch gelten:

Kpp $\equiv$ p, d.h. $K(2,2) = 2$

Damit ergibt sich ein Widerspruch.

2.1.2 Untersuchung der Existenz eines Systems mit Negator N_2

N_2 wurde definiert als:

p	N_2p
2	1
1	2
0	0

Für den Disjunktor gelten folgende zweiwertige Gesetze:

2.1.2.1 $\vdash$ ApNp

2.1.2.2 $\vdash$ App $\equiv$ p.

Wegen 2.1.2.1 muß gelten: ApN_2p, d.h. A(0,0) = 2.
200 0

Wegen 2.1.2.2 jedoch muß gelten: App = p, d.h. A(0,0) = 0.
000 0

Dies steht zueinander im Widerspruch.

2.1.3 Überprüfung der Konstruktionsmöglichkeit eines Systems mit Negator N_3

N_3:

p	N_3p
2	0
1	1
0	2

Einerseits muß wegen 2.1.1.1 gelten:

$KpN_3p \equiv 0$, d.h. KpN_3p, also K(1,1) = 0.
011 1

Andererseits ist wegen 2.1.1.2:

Kpp $\equiv$ p, also K(1,1) = 1.
111 1

Man erhält einen Widerspruch.

Zusammenfassung

Die Untersuchung hat gezeigt, daß das System dreiwertiger Funktoren kein Untersystem von 16 Funktoren enthält, das zum zweiwertigen System isomorph ist. Man kann sogar sagen, daß es kein Untersystem gibt, in dem drei Funktoren existieren, die alle strukturellen Eigenschaften des zweiwertigen Negators, Konjunktors und Disjunktors besitzen.

2.2 Konstruktion von Implikatoren mit festen Eckwerten unter Beibehaltung der strukturellen Eigenschaften

In 2.1 wurde gezeigt, daß in einem dreiwertigen System nicht alle Eigenschaften der zweiwertigen Funktoren gleichzeitig aufrecht erhalten werden können. Daher lohnt es sich zu fragen, welche Eigenschaften miteinander verträglich sind.

Unter den zweiwertigen Funktoren nimmt der Implikator eine besonders wichtige Rolle ein. Deshalb soll untersucht werden, wie man im Dreiwertigen Implikatoren definieren kann, die ein Maximum an strukturellen Eigenschaften aus dem Zweiwertigen bewahren.

Zunächst sollen die Implikatoren betrachtet werden, die in den vier Eckwerten mit dem zweiwertigen Implikator übereinstimmen, d.h. folgende Tabelle haben:

Tabelle 2.2.1

C	2	1	0
2	2		0
1			
0	2		2

Durch diese Tabelle werden 243 Funktoren festgelegt. In den folgenden Abschnitten wird nun untersucht, welche dieser Funktoren den Gesetzen 1.3.3 bis 1.3.8 genügen.

2.2.1 Untersuchung der reflexiven Implikatoren

In Tabelle 2.2.1 soll der Mittelwert der Hauptdiagonale so ergänzt werden, daß die Implikatoren reflexiv werden, d.h. es muß gelten:

C	p	p
2	2	2
2	1	1
2	0	0

Das bedeutet, daß in der Hauptdiagonale an allen Stellen nur der Wert 2 stehen darf:

Tabelle 2.2.1.1

C	2	1	0
2	2		0
1		2	
0	2		2

Es gibt 81 reflexive Implikatoren, deren Eckwerte mit denen des Zweiwertigen übereinstimmen. Diese Implikatoren sind gleichzeitig nicht symmetrisch, da C(0,2) ≠ C(2,0) ist. 81 Funktoren erfüllen die Eigenschaften 1.3.3 und 1.3.8.

Will man die Bedingung 1.3.6 erfüllen, muß man C(1,2) = 2 und C(0,1)= 2 in Tabelle 2.2.1.1 ergänzen:

Tabelle 2.2.1.2

C	2	1	0
2	2		0
1	2	2	
0	2	2	2

Es gibt neun reflexive Implikatoren, die ein zweiwertiges Analogon haben, nicht symmetrisch sind und Bedingung 1.3.6 erfüllen.

Aus Bedingung 1.3.7 ergibt sich, daß an den offenen Stellen nur eine 0 oder eine 1 stehen darf, d.h. es ergeben sich noch vier mögliche Implikatoren:

C_1	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	1
0	2	2	2

C_2	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	0
0	2	2	2

C_3	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	0
0	2	2	2

C_4	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	1
0	2	2	2

Untersuchung der Gültigkeit von 1.3.4.1:

	C	Cpq	C	Cqr	Cpr
	2	222	2	222	222
	2	222	2	21	21
	2	222	2	020	020
	2	21	2	212	222
Z. 1		21		211	21
Z. 2		21		10	020
	2	020	2	202	222
	2	020		201	21
	2	020	0	200	020
	2	212	2	222	212
	2	212	2	21	211
	2	212	2	020	10
	2	211	2	212	212
	2	211	2	211	211
	2	211	2	10	10
	2	10	2	202	212
	2	10	2	201	211
Z. 3		10		200	10

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
2	202	2	222	202
2	202	2	21	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	10	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

Es bleiben nur noch drei Zeilen offen, an denen eine Gültigkeit des Gesetzes scheitern kann. Vervollständigt man für C_1 - C_4 die Zeilen Z_1, Z_2 und Z_3, so ergibt sich:

C_1:	Z_1	2	121	1	211	121
	Z_2	2	121	1	110	020
	Z_3	2	110	1	200	110
C_2:	Z_1	2	121	1	211	121
	Z_2	2	121	2	010	020
	Z_3	2	010	0	200	010
C_3:	Z_1	2	021	0	211	021
	Z_2	2	021	2	010	020
	Z_3	2	010	0	200	010
C_4:	Z_1	2	021	0	211	021
	Z_2	2	021	1	110	020
	Z_3	1	110	0	200	110

Die Funktoren C_1 - C_3 erfüllen somit 1.3.4.1.

Es steht noch die Betrachtung der Gesetze 1.3.4.2, 1.3.5.1 und 1.3.5.2 aus. Dabei ist zu beachten, daß in diesen Gesetzen auch der Konjunktor vorkommt, der mit dem Implikator folgendermaßen zusammenhängt:

$$\vdash Kpq \equiv NCpNq$$

Der Negator N:

N	p
0	2
1	1
2	0

ist der einzige, der die Eckwerte des zweiwertigen Negators beibehält und das Gesetz $NNp \equiv p$ erfüllt. Mit ihm läßt sich zu jedem der drei Implikatoren C_1 - C_3 je ein Konjunktor definieren.

C_1	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	1
0	2	2	2

K_1	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0

C_1 und K_1 erfüllen 1.3.4.2, 1.3.5.1 und 1.3.5.2, denn:

C_1	K_1	C_1pq	C_1qr	C_1pr	(1.3.4.2)
2	2	2 22	2 22	2 22	
2	1	2 22	1 21	1 21	
2	0	2 22	0 20	0 20	
2	1	1 21	2 12	2 22	
2	1	1 21	2 11	1 21	
2	0	1 21	1 10	0 20	
2	0	0 20	2 02	2 22	
2	0	0 20	2 01	1 21	
2	0	0 20	2 00	0 20	
2	2	2 12	2 22	2 12	
2	1	2 12	1 21	2 11	
2	0	2 12	0 20	1 10	
2	2	2 11	2 12	2 12	
2	2	2 11	2 11	2 11	
2	1	2 11	1 10	1 10	
2	1	1 10	2 02	2 12	
2	1	1 10	2 01	2 11	
2	1	1 10	2 00	1 10	
2	2	2 02	2 22	2 02	
2	1	2 02	1 21	2 01	
2	0	2 02	0 20	2 00	
2	2	2 01	2 12	2 02	
2	2	2 01	2 11	2 01	
2	1	2 01	1 10	2 00	
2	2	2 00	2 02	2 02	
2	2	2 00	2 01	2 01	
2	2	2 00	2 00	2 00	

C_1	K_1	pq	r	≡	C_1 q C_1 pr	(1.3.5.1)
2	2	22	2		2 2 2 22	
1	2	22	1		1 2 1 21	
0	2	22	0		0 2 0 20	
2	1	21	2		2 1 2 22	
2	1	21	1		2 1 1 21	
1	1	21	0		1 1 0 20	
2	0	20	2		2 0 2 22	
2	0	20	1		2 0 1 21	
2	0	20	0		2 0 0 20	
2	1	12	2		2 2 2 12	
2	1	12	1		2 2 2 11	
1	1	12	0		1 2 1 10	
2	0	11	2		2 1 2 12	
2	0	11	1		2 1 2 11	
2	0	11	0		2 1 1 10	
2	0	10	2		2 0 2 12	
2	0	10	1		2 0 2 11	
2	0	10	0		2 0 1 10	

2	0	02	2		2	2	2	02
2	0	02	1		2	2	2	01
2	0	02	0		2	2	2	00
2	0	01	2		2	1	2	02
2	0	01	1		2	1	2	01
2	0	01	0		2	1	2	00
2	0	00	2		2	0	2	02
2	0	00	1		2	0	2	01
2	0	00	0		2	0	2	00

Da K_1 symmetrisch ist, kann aus der Gültigkeit von 1.3.5.1 auf die Gültigkeit von 1.3.5.2 geschlossen werden, denn es gilt $\vdash K_1pq \equiv K_1qp$, also $\vdash C_1K_1pqr \equiv C_1K_1qpr \equiv C_1pC_1qr$.

1.3.5.1

C_2	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	0
0	2	2	2

K_2	2	1	0
2	2	1	0
1	2	0	0
0	0	0	0

C_2 und K_2 erfüllen weder 1.3.4.2, noch 1.3.5.1, noch 1.3.5.2, denn

C_2	K_2	C_2pq	C_2qr	C_2pr	(1.3.4.2)
1	2	1 21	2 11	1 21	

C_2	K_2	pq	r	$\equiv$	C_2	q	C_2	pr	(1.3.5.1)
2	0	11	0		0	1	0	10	

C_2	K_2	pq	r	$\equiv$	C_2	p	C_2	qr	(1.3.5.2)
2	0	11	0		0	1	0	10	

C_3	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	0
0	2	2	2

K_3	2	1	0
2	2	2	0
1	2	0	0
0	0	0	0

1.3.4.2 wird erfüllt:

C_3	K_3	C_3pq	C_3qr	C_3pr
2	2	2 22	2 22	2 22
2	0	2 22	0 21	0 21
2	0	2 22	0 20	0 20
2	0	0 21	2 12	2 22
2	0	0 21	2 11	0 21
2	0	0 21	0 10	0 20
2	0	0 20	2 02	2 22
2	0	0 20	2 01	0 21
2	0	0 20	2 00	0 20

2 2 2 12 2 22 2 12
2 0 2 12 0 21 2 11
2 0 2 12 0 20 0 10
2 2 2 11 2 12 2 12
2 2 2 11 2 11 2 11
2 0 2 11 0 10 0 10
2 0 0 10 2 02 2 12
2 0 0 10 2 01 2 11
2 0 0 10 2 00 0 10

2 2 2 02 2 22 2 02
2 0 2 02 0 21 2 01
2 0 2 02 0 20 2 00
2 2 2 01 2 12 2 02
2 2 2 01 2 11 2 01
2 0 2 01 0 10 2 00
2 2 2 00 2 02 2 02
2 2 2 00 2 01 2 01
2 2 2 00 2 00 2 00

1.3.5.1 und 1.3.5.2 werden nicht erfüllt, denn:

$C_3\ K_3\ pq\ r \equiv C_3\ q\ C_3\ pr$ (1.3.5.1)

2 0 11 0 0 1 0 10

$C_3\ K_3\ qp\ r \equiv C_3\ p\ C_3\ qr$ (1.3.5.2)

2 0 11 0 0 1 0 10

C_1 ist der einzige Implikator, der alle Eigenschaften erfüllt.[1)] Der durch ihn definierte Konjunktor K_1 jedoch erfüllt nicht alle zweiwertigen Gesetze, so ist z.B.

$K_1pp \not\equiv p$, denn $K_1(1,1) \neq 1$.

Zusammenfassung:

Es gibt genau einen dreiwertigen Implikator C_1, der ein Analogon 1.Art zum zweiwertigen Implikator ist und der die strukturellen Eigenschaften 1.3.3 - 1.3.8 besitzt.

2.2.2 Untersuchung der Transitivitätsgesetze

Die Bedingungen 1.3.3, 1.3.6 und 1.3.7 schränken die Möglichkeiten der Geltungswertbelegung und damit die Anzahl der möglichen Implikatoren stark ein. Deshalb soll ohne Rücksicht auf diese Bedingungen nach Implikatoren gesucht werden, die die im Zweiwertigen wichtigen Transitivitätsgesetze erfüllen. Die weiteren Eigenschaften lassen sich dann an den jeweiligen Matrizen ablesen.

Zunächst läßt sich zeigen, daß alle 81 Funktoren der Form

C	2	1	0
2	2		0
1		1	
0	2		2

das Gesetz 1.3.4.1 nicht erfüllen, denn:

C Cpq C Cqr Cpr (1.3.4.1)

1 111 1 111 111

Daher bleiben Implikatoren mit C(1,1) = 0 und C(1,1) = 2 zu untersuchen:

2.2.2.1 C(1,1) = 0

Es sind drei Fälle zu untersuchen, nämlich

C(2,1) = 2, C(2,1) = 1 und C(2,1) = 0.

2.2.2.1.1 C(2,1) = 2

Dann gilt: C(0,1) ≠ 1 und C(0,1) ≠ 0 wegen

C Cpq C Cqr Cpr

0 200 0 101 101

0 202 0 221 001

also ist C(0,1) = 2

Außerdem muß C(1,2) = 0, denn für C(1,2) = 1 bzw. C (1,2) = 2 erhält man:

C Cpq C Cqr Cpr

0 212 0 221 011

1 112 2 222 112 .

Da C(1,0)≠ 2 und C(1,0) ≠ 1 sein muß, bleibt nur C(1,0) = 0 übrig:

C Cpq C Cqr Cpr

0 221 0 210 020

0 110 2 200 110

Insgesamt erhält man:

C	2	1	0
2	2	2	0
1	0	0	0
0	2	2	2

Die vollständige Geltungswertuntersuchung beweist die Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2 für diesen Implikator und den zugehörigen Konjunktor K:

K	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	2
0	0	0	0

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	012	222	
2	221	2	011	221	
2	221	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	201	221	
2	020	2	200	020	
2	012	0	222	012	
2	012	0	221	011	
2	012	2	020	010	
2	011	2	012	012	
2	011	2	011	011	
2	011	2	010	010	
2	010	0	202	012	
2	010	0	201	011	
2	010	0	200	010	
2	202	2	222	202	
2	202	2	221	201	
2	202	2	020	200	
2	201	2	012	202	
2	201	2	011	201	
2	201	2	010	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	201	201	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	2	222	221	221	
2	0	222	020	020	
2	0	221	012	222	
2	0	221	011	221	
2	0	221	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	221	
2	0	020	200	020	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr
2	0	012	222	012
2	0	012	221	011
2	0	012	020	010
2	0	011	012	012
2	0	011	011	011
2	0	011	010	010
2	0	010	202	012
2	0	010	201	011
2	0	010	200	010
2	2	202	222	202
2	2	202	221	201
2	2	202	020	200
2	2	201	012	202
2	2	201	011	201
2	2	201	010	200
2	2	200	202	202
2	2	200	201	201
2	2	200	200	200

An der Matrix läßt sich ablesen, daß C der Bedingung 1.3.6.1, aber nicht 1.3.6.2 genügt.

2.2.2.1.2 C(2,1) = 1

Diese Annahme führt zum Widerspruch wegen

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
0	222	0	121	121

2.2.2.1.3 C(2,1) = 0

Die zu untersuchenden Funktoren haben folgende Tabelle:

C	2	1	0
2	2	0	0
1		0	
0	2		2

Für C(1,0) = 1 ergibt sich folgender Widerspruch:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	1	10	0	2	00	1	10

Für C(1,0) = 2 ergibt sich C(1,2) = 2 wegen

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	10	0	2	02	1	12
0	2	10	0	2	02	0	12

und C(0,1) = 0 wegen

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	1	01	1	0	11	1	01
0	2	10	0	2	01	0	11

Somit lauten für C(1,0) = 2 die Tabellen des Funktors und des zugehörigen Konjunktors:

2.2.2.1.3.1

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	2
0	2	0	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	0	2	0
0	0	2	0

Die Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2 wird durch folgende Geltungswertuntersuchung gezeigt:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	0	21	0	21	
2	2	22	2	0	20	0	20	
2	0	21	2	2	12	2	22	
2	0	21	2	0	11	0	21	
2	0	21	0	2	10	0	20	
2	0	20	2	2	02	2	22	
2	0	20	2	0	01	0	21	
2	0	20	0	2	00	0	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	0	21	0	11	
2	2	12	2	0	20	2	10	
2	0	11	2	2	12	2	12	
2	0	11	2	0	11	0	11	
2	0	11	2	2	10	2	10	
2	2	10	2	2	02	2	12	
2	2	10	2	0	01	0	11	
2	2	10	2	2	00	2	10	
2	2	02	2	2	22	2	02	
2	2	02	2	0	21	0	01	
2	2	02	2	0	20	2	00	
2	0	01	2	2	12	2	02	
2	0	01	2	0	11	0	01	
2	0	01	2	2	10	2	00	
2	2	00	2	2	02	2	02	
2	2	00	2	0	01	0	01	
2	2	00	2	2	00	2	00	

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
2	2	2	22	2	22	2	22	
2	0	2	22	0	21	0	21	
2	0	2	22	0	20	0	20	
2	0	0	21	2	12	2	22	
2	0	0	21	0	11	0	21	
2	0	0	21	2	10	0	20	
2	0	0	20	2	02	2	22	
2	0	0	20	0	01	0	21	
2	0	0	20	2	00	0	20	

2	2	2	12	2	22	2	12
2	0	2	12	0	21	0	11
2	0	2	12	0	20	2	10
2	0	0	11	2	12	2	12
2	0	0	11	0	11	0	11
2	0	0	11	2	10	2	10
2	2	2	10	2	02	2	12
2	0	2	10	0	01	0	11
2	2	2	10	2	00	2	10
2	2	2	02	2	22	2	02
2	0	2	02	0	21	0	01
2	0	2	02	0	20	2	00
2	0	0	01	2	12	2	02
2	0	0	01	0	11	0	01
2	0	0	01	2	10	2	00
2	2	2	00	2	02	2	02
2	0	2	00	0	01	0	01
2	2	2	00	2	00	2	00

Setzt man C(1,0) = 0, so erhält man C(1,2) ≠ 1 und C(0,1) ≠ 1 wegen:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	1	12	2	0	20	0	10
0	1	01	1	0	11	1	01

Damit bleiben die folgenden vier Implikatoren übrig:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2/0	0	0
0	2	2/0	2

Die zugehörigen Konjunktoren lauten:

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	0/2
0	0	0/2	0

Die Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2 ergibt sich jeweils aus der im folgenden aufgeführten vollständigen Geltungswertuntersuchung:

2.2.2.1.3.2

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	0
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	0
0	0	0	0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	0	21	0	21	
2	2	22	2	0	20	0	20	
2	0	21	2	2	12	2	22	
2	0	21	2	0	11	0	21	
2	0	21	2	0	10	0	20	
2	0	20	2	2	02	2	22	
2	0	20	0	2	01	0	21	
2	0	20	0	2	00	0	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	0	21	0	11	
2	2	12	2	0	20	0	10	
2	0	11	2	2	12	2	12	
2	0	11	2	0	11	0	11	
2	0	11	2	0	10	0	10	
2	0	10	2	2	02	2	12	
2	0	10	0	2	01	0	11	
2	0	10	0	2	00	0	10	
2	2	02	2	2	22	2	02	
2	2	02	2	0	21	2	01	
2	2	02	2	0	20	2	00	
2	2	01	2	2	12	2	02	
2	2	01	2	0	11	2	01	
2	2	01	2	0	10	2	00	
2	2	00	2	2	02	2	02	
2	2	00	2	2	01	2	01	
2	2	00	2	2	00	2	00	

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
2	2	2	22	2	22	2	22	
2	0	2	22	0	21	0	21	
2	0	2	22	0	20	0	20	
2	0	0	21	2	12	2	22	
2	0	0	21	0	11	0	21	
2	0	0	21	0	10	0	20	
2	0	0	20	2	02	2	22	
2	0	0	20	2	01	0	21	
2	0	0	20	2	00	0	20	
2	2	2	12	2	22	2	12	
2	0	2	12	0	21	0	11	
2	0	2	12	0	20	0	10	
2	0	0	11	2	12	2	12	
2	0	0	11	0	11	0	11	
2	0	0	11	0	10	0	10	
2	0	0	10	2	02	2	12	
2	0	0	10	2	01	0	11	
2	0	0	10	2	00	0	10	

2	2	2	02	2	22	2	02
2	0	2	02	0	21	2	01
2	0	2	02	0	20	2	00
2	2	2	01	2	12	2	02
2	0	2	01	0	11	2	01
2	0	2	01	0	10	2	00
2	2	2	00	2	02	2	02
2	2	2	00	2	01	2	01
2	2	2	00	2	00	2	00

Tabelle 2.2.2.1.3.3

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	0
0	2	0	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	0
0	0	2	0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	2	22	2	2	22	2	22
2	2	22	2	0	21	0	21
2	2	22	2	0	20	0	20
2	0	21	2	2	12	2	22
2	0	21	2	0	11	0	21
2	0	21	2	0	10	0	20
2	0	20	2	2	02	2	22
2	0	20	2	0	01	0	21
2	0	20	0	2	00	0	20
2	2	12	2	2	22	2	12
2	2	12	2	0	21	0	11
2	2	12	2	0	20	0	10
2	0	11	2	2	12	2	12
2	0	11	2	0	11	0	11
2	0	11	2	0	10	0	10
2	0	10	2	2	02	2	12
2	0	10	2	0	01	0	11
2	0	10	0	2	00	0	10
2	2	02	2	2	22	2	02
2	2	02	2	0	21	0	01
2	2	02	2	0	20	2	00
2	0	01	2	2	12	2	02
2	0	01	2	0	11	0	01
2	0	01	2	0	10	2	00
2	2	00	2	2	02	2	02
2	2	00	2	0	01	0	01
2	2	00	2	2	00	2	00

(1.3.4.1)

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
2	2	2	22	2	22	2	22	
2	0	2	22	0	21	0	21	
2	0	2	22	0	20	0	20	
2	0	0	21	2	12	2	22	
2	0	0	21	0	11	0	21	
2	0	0	21	0	10	0	20	
2	0	0	20	2	02	2	22	
2	0	0	20	0	01	0	21	
2	0	0	20	2	00	0	20	
2	2	2	12	2	22	2	12	
2	0	2	12	0	21	0	11	
2	0	2	12	0	20	0	10	
2	0	0	11	2	12	2	12	
2	0	0	11	0	11	0	11	
2	0	0	11	0	10	0	10	
2	0	0	10	2	02	2	12	
2	0	0	10	0	01	0	11	
2	0	0	10	2	00	0	10	
2	2	2	02	2	22	2	02	
2	0	2	02	0	21	0	01	
2	0	2	02	0	20	2	00	
2	0	0	01	2	12	2	02	
2	0	0	01	0	11	0	01	
2	0	0	01	0	10	2	00	
2	2	2	00	2	02	2	02	
2	0	2	00	0	01	0	01	
2	2	2	00	2	00	2	00	

Tabelle 2.2.2.1.3.4

C	2	1	0
2	2	0	0
1	0	0	0
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	2
0	0	0	0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	0	21	0	21	
2	2	22	2	0	20	0	20	
2	0	21	2	0	12	2	22	
2	0	21	2	0	11	0	21	
2	0	21	2	0	10	0	20	
2	0	20	2	2	02	2	22	
2	0	20	0	2	01	0	21	
2	0	20	0	2	00	0	20	

2	0	12	0	2	22	0	12
2	0	12	2	0	21	0	11
2	0	12	2	0	20	0	10
2	0	11	2	0	12	0	12
2	0	11	2	0	11	0	11
2	0	11	2	0	10	0	10
2	0	10	0	2	02	0	12
2	0	10	0	2	01	0	11
2	0	10	0	2	00	0	10
2	2	02	2	2	22	2	02
2	2	02	2	0	21	2	01
2	2	02	2	0	20	2	00
2	2	01	2	0	12	2	02
2	2	01	2	0	11	2	01
2	2	01	2	0	10	2	00
2	2	00	2	2	02	2	02
2	2	00	2	2	01	2	01
2	2	00	2	2	00	2	00

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	012	222	
2	0	021	011	021	
2	0	021	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	021	
2	0	020	200	020	
2	0	012	222	012	
2	0	012	021	011	
2	0	012	020	010	
2	0	011	012	012	
2	0	011	011	011	
2	0	011	010	010	
2	0	010	202	012	
2	0	010	201	011	
2	0	010	200	010	
2	2	202	222	202	
2	0	202	021	201	
2	0	202	020	200	
2	0	201	012	202	
2	0	201	011	201	
2	0	201	010	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

2.2.2.1.3.5

C	2	1	0
2	2	0	0
1	0	0	0
0	2	0	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	2
0	0	2	0

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
2	222	2	222	222
2	222	2	021	021
2	222	2	020	020
2	021	2	012	222
2	021	2	011	021
2	021	2	010	020
2	020	2	202	222
2	020	2	001	021
2	020	0	200	020
2	012	0	222	012
2	012	2	021	011
2	012	2	020	010
2	011	2	012	012
2	011	2	011	011
2	011	2	010	010
2	010	0	202	012
2	010	2	001	011
2	010	0	200	010
2	202	2	222	202
2	202	2	021	001
2	202	2	020	200
2	001	2	012	202
2	001	2	011	001
2	001	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	001	001
2	200	2	200	200

(1.3.4.1)

C	K	Cpq	Cqr	Cpr
2	2	222	222	222
2	0	222	021	021
2	0	222	020	020
2	0	021	012	222
2	0	021	011	021
2	0	021	010	020
2	0	020	202	222
2	0	020	001	021
2	0	020	200	020

(1.3.4.2)

2	0	012	222	012
2	0	012	021	011
2	0	012	020	010
2	0	011	012	012
2	0	011	011	011
2	0	011	010	010
2	0	010	202	012
2	0	010	001	011
2	0	010	200	010
2	2	202	222	202
2	0	202	021	001
2	0	202	020	200
2	0	001	012	202
2	0	001	011	001
2	0	001	010	200
2	2	200	202	202
2	0	200	001	001
2	2	200	200	200

Die Implikatoren der Tabellen 2.2.2.1.3.1 und 2.2.2.1.3.3 erfüllen 1.3.6.2. Das Gesetz 1.3.6.1 gilt für den Implikator der Tabelle 2.2.2.1.3.4. Der Implikator 2.2.2.1.3.2 erfüllt sowohl 1.3.6.1 als auch 1.3.6.2.

2.2.2.2 C(1,1) = 2

Auch hier sind die entsprechenden drei Fälle zu untersuchen, was jeweils wie in 2.2.2.1.1 durchgeführt wird.

2.2.2.2.1 C(2,1) = 2

Es gilt C(0,1) ≠ 0 wegen

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
0	202	0	221	001

und C(1,0) ≠ 2 wegen

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
0	221	0	210	020.

Für C(0,1) = 1 gilt C(1,2) = 2, denn:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
2	101	2	211	101.

Somit ergeben sich wegen C(1,0) ≠ 2 folgende zwei mögliche Implikatoren:

Tabelle 2.2.2.2.1.1

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	1/0
0	2	1	2

Die zugehörigen Konjunktoren lauten:

K	2	1	0
2	2	0	0
1	1/2	0	0
0	0	1	0

Die Gültigkeit von 1.3.4.1 wird durch die Geltungswertuntersuchung bewiesen:

Für C(1,0) = 1 gilt:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	212	222	
2	221	2	211	221	
2	221	1	110	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	101	221	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	221	211	
2	212	1	020	110	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	110	110	
2	110	2	202	212	
2	110	2	101	211	
2	110	2	200	110	
2	202	2	222	202	
2	202	2	221	101	
2	202	2	020	200	
2	101	2	212	202	
2	101	2	211	101	
2	101	2	110	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	101	101	
2	200	2	200	200	

1.3.4.2 ist nicht erfüllt, denn:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr
1	0	212	020	110

Für C(1,0) = 0 gilt:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	212	222	
2	221	2	211	221	
2	221	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	101	221	
2	020	0	200	020	

2	212	2	222	212
2	212	2	221	211
2	212	2	020	010
2	211	2	212	212
2	211	2	211	211
2	211	2	010	010
2	010	2	202	212
2	010	2	101	211
2	010	0	200	010
2	202	2	222	202
2	202	2	221	101
2	202	2	020	200
2	101	2	212	202
2	101	2	211	101
2	101	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	101	101
2	200	2	200	200

1.3.4.2 gilt nicht wegen:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr
0	2	110	200	010

Für C(0,1) = 2 und C(1,0) = 1 gilt C(1,2) = 2, denn:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
2	110	2	201	211.

Somit ergibt sich der Funktor von Tabelle 2.2.2.2.1.2.

Tabelle 2.2.2.2.1.2

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	1
0	2	2	2

Die Tabelle des zugehörigen Konjunktors lautet:

K	2	1	0
2	2	0	0
1	1	0	0
0	0	0	0

Die Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2 wird im folgenden nachgewiesen:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	212	222	
2	221	2	211	221	
2	221	1	110	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	201	221	
2	020	0	200	02o	

2	212	2	222	212
2	212	2	221	211
2	212	2	020	110
2	211	2	212	212
2	211	2	211	211
2	211	2	110	110
2	110	2	202	212
2	110	2	201	211
2	110	2	200	110
2	202	2	222	202
2	202	2	221	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	110	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	2	222	221	221	
2	0	222	020	020	
2	2	221	212	222	
2	2	221	211	221	
2	0	221	110	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	221	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	2	212	221	211	
2	0	212	020	110	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	0	211	110	110	
2	1	110	202	212	
2	1	110	201	211	
2	1	110	200	110	
2	2	202	222	202	
2	2	202	221	201	
2	0	202	020	200	
2	2	201	212	202	
2	2	201	211	201	
2	0	201	110	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Nun bleiben $C(0,1) = 2$ und $C(1,0) = 0$ zu untersuchen.

Es gilt $C(1,2) \neq 1$ wegen:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
1	112	2	020	010

Somit ergeben sich die beiden Funktoren von Tabelle 2.2.2.2.1.3

C	2	1	0
2	2	2	0
1	0/2	2	0
0	2	2	2

Die zugehörigen Konjunktoren haben folgende Tabelle:

K	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	2/0
0	0	0	0

Nachweis der Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2:
Für C(1,2) = 0:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	012	222	
2	221	2	211	221	
2	221	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	201	221	
2	020	0	200	020	
2	012	0	222	012	
2	012	2	221	211	
2	012	2	020	010	
2	211	2	012	012	
2	211	2	211	211	
2	211	2	010	010	
2	010	0	202	012	
2	010	2	201	211	
2	010	0	200	010	
2	202	2	222	202	
2	202	2	221	201	
2	202	2	020	200	
2	201	2	012	202	
2	201	2	211	201	
2	201	2	010	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	201	201	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	2	222	221	221	
2	0	222	020	020	
2	0	221	012	222	
2	2	221	211	221	
2	0	221	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	221	
2	0	020	200	020	
2	0	012	222	012	
2	0	012	221	211	
2	0	012	020	010	
2	0	211	012	012	
2	2	211	211	211	
2	0	211	010	010	
2	0	010	202	012	
2	0	010	201	211	
2	0	010	200	010	
2	2	202	222	202	
2	2	202	221	201	
2	0	202	020	200	
2	0	201	012	202	
2	2	201	211	201	
2	0	201	010	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Für C(1,2) = 2

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	221	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	212	222	
2	221	2	211	221	
2	221	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	201	221	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	221	211	
2	212	2	020	010	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	010	010	
2	010	2	202	212	
2	010	2	201	211	
2	010	0	200	010	

2	202	2	222	202
2	202	2	221	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	2	222	221	221	
2	0	222	020	020	
2	2	221	212	222	
2	2	221	211	221	
2	0	221	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	221	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	2	212	221	211	
2	0	212	020	010	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	0	211	010	010	
2	0	010	202	212	
2	0	010	201	211	
2	0	010	200	010	
2	2	202	222	202	
2	2	202	221	201	
2	0	202	020	200	
2	2	201	212	202	
2	2	201	211	201	
2	0	201	010	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Die Gesetze 1.3.6.1 und 1.3.6.2 gelten für den Implikator von Tabelle 2.2.2.2.1.2, während der von Tabelle 2.2.2.2.1.3 für C(1,2) = 0 nur 1.3.6.1, für C(1,2) = 2 ebenfalls beide Gesetze erfüllt.

2.2.2.2.2 C(2,1) = 1

Für die folgenden sieben Implikatoren gilt 1.3.4.1:

Tabelle 2.2.2.2.1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	1
0	2	1	2

Tabelle 2.2.2.2.2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	0/2
0	2	1/2	2

Tabelle 2.2.2.2.2.3

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	2
0	2	0	2

Tabelle 2.2.2.2.2.4

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	1
0	2	2	2

Der Beweis wird wiederum durch die Geltungswerttabelle geführt. Für den Implikator von Tabelle 2.2.2.2.2.1 gilt:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	020	020	
2	121	1	112	222	
2	121	1	211	121	
2	121	1	110	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	101	121	
2	020	0	200	020	
2	112	1	222	112	
2	112	1	121	211	
2	112	1	020	110	
2	211	2	112	112	
2	211	2	211	211	
2	211	2	110	110	
2	110	1	202	112	
2	110	1	101	211	
2	110	1	200	110	
2	202	2	222	202	
2	202	2	121	101	
2	202	2	020	200	
2	101	1	112	202	
2	101	1	211	101	
2	101	1	110	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	101	101	
2	200	2	200	200	

Die folgenden Tabellen zeigen die Untersuchung für die vier Implikatoren von 2.2.2.2.2.2.

C (1,0) = 0 C(0,1) =1:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
2	222	2	222	222
2	222	2	121	121
2	222	2	020	020
2	121	2	212	222
2	121	1	211	121
2	121	2	010	020
2	020	2	202	222
2	020	2	101	121
2	020	0	200	020

2	212	2	222	212
2	212	2	121	211
2	212	2	020	010
2	211	2	212	212
2	211	2	211	211
2	211	2	010	010
2	010	2	202	212
2	010	2	101	211
2	010	0	200	010
2	202	2	222	202
2	202	2	121	101
2	202	2	020	200
2	101	2	212	202
2	101	1	211	101
2	101	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	101	101
2	200	2	200	200

C(1,0) = 0 C(0,1) = 2:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	020	020	
2	121	2	212	222	
2	121	1	211	121	
2	121	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	1	201	121	
2	020	0	200	020	
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	221	
2	222	2	020	020	
2	221	2	212	222	
2	221	2	211	221	
2	221	2	010	020	
2	010	2	202	212	
2	010	2	201	211	
2	010	0	200	010	
2	202	2	222	202	
2	202	2	121	201	
2	202	2	020	200	
2	201	2	212	202	
2	201	2	211	201	
2	201	2	010	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	201	201	
2	200	2	200	200	

C(1,0) = 2 C(0,1) = 1:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	020	020	
2	121	2	212	222	
2	121	1	211	121	
2	121	0	210	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	101	121	
2	020	0	200	020	
2	202	2	222	202	
2	202	2	121	101	
2	202	2	020	200	
2	101	2	212	202	
2	101	1	211	101	
2	101	2	210	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	101	101	
2	200	2	200	200	
2	212	2	222	212	
2	212	2	121	211	
2	212	2	020	210	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	210	210	
2	210	2	202	212	
2	210	2	101	211	
2	210	2	200	210	

C(1,0) = 2 C(0,1) = 2:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	202	020	
2	121	2	212	222	
2	121	1	211	121	
2	121	0	210	020	
2	020	2	202	222	
2	020	1	201	121	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	121	211	
2	212	2	020	210	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	210	210	
2	210	2	202	212	
2	210	2	201	211	
2	210	2	200	210	

2	202	2	222	202
2	202	2	121	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	210	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

Die Geltungswertuntersuchung lautet bei dem Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	020	020	
2	121	2	212	222	
2	121	1	211	121	
2	121	0	210	020	
2	020	2	202	222	
2	020	0	001	121	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	121	211	
2	212	2	020	210	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	210	210	
2	210	2	202	212	
2	210	2	001	211	
2	210	2	200	210	
2	202	2	222	202	
2	202	2	121	001	
2	202	2	020	200	
2	001	2	212	202	
2	001	0	211	001	
2	001	2	210	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	001	001	
2	200	2	200	200	

Führt man die Untersuchung für den Implikator von 2.2.2.2.2.4 durch, so erhält man:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	121	121	
2	222	2	020	020	
2	121	2	212	222	
2	121	1	211	121	
2	121	1	110	020	
2	020	2	202	222	
2	020	1	201	121	
2	020	0	200	020	

2	212	2	222	212
2	212	2	121	211
2	212	2	020	110
2	211	2	212	212
2	211	2	211	211
2	211	2	110	110
2	110	2	202	212
2	110	2	201	211
2	110	1	200	110
2	202	2	222	202
2	202	2	121	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	110	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

Der zu dem Implikator von 2.2.2.2.2.1 gehörende Konjunktor hat folgende Tabelle:

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	1
0	0	1	0

Damit lautet die Geltungswertuntersuchung für das Gesetz 1.3.4.2:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	1	222	121	121	
2	0	222	020	020	
2	0	121	112	222	
2	1	121	211	121	
2	0	121	110	020	
2	0	020	202	222	
2	1	020	101	121	
2	0	020	200	020	
2	1	112	222	112	
2	0	112	121	211	
2	1	112	020	110	
2	1	211	112	112	
2	2	211	211	211	
2	1	211	110	110	
2	1	110	202	112	
2	0	110	101	211	
2	1	110	200	110	

2	2	202	222	202
2	1	202	121	101
2	0	202	020	200
2	0	101	112	202
2	1	101	211	101
2	0	101	110	200
2	2	200	202	202
2	1	200	101	101
2	2	200	200	200

Die Implikatoren von Tabelle 2.2.3.3.3.3 haben die zugehörigen Konjunktoren:

K	2	1	0
2	2	1	0
1	2/0	0	0
0	0	1/0	0

Setzt man für den Implikator C(1,0) = C(0,1) = 2 und somit für den Konjunktor K(1,2) = K(0,1) = 0, so gilt 1.3.4.2. Dies wird durch folgende Geltungswertuntersuchung bewiesen:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	1	222	121	121	
2	0	222	020	020	
2	0	121	212	222	
2	0	121	211	121	
2	0	121	210	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	121	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	1	212	121	211	
2	0	212	020	210	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	2	211	210	210	
2	2	210	202	212	
2	2	210	201	211	
2	2	210	200	210	
2	2	202	222	202	
2	1	202	121	201	
2	0	202	020	200	
2	2	201	212	202	
2	2	201	211	201	
2	2	201	210	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Gilt für den Implikator C(0,1) = 1 und somit für den Konjunktor ebenfalls K(0,1) = 1, so gilt 1.3.4.2 nicht, da

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
1		101	211	101	

Setzt man beim Implikator C(1,0) = 0 und somit beim Konjunktor K(1,2) = 2, so gilt 1.3.4.2 ebenfalls nicht:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
1	2	121	211	121	

Zu dem Implikator von 2.2.2.2.2.3 gehört der Konjunktor

K	2	1	0
2	2	1	0
1	0	0	0
0	0	2	0

1.3.4.2 ist nicht erfüllt, denn:

C	K	Cpq	Cqr	Cpr
0	0	121	211	121

Der Konjunktor K mit

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0

gehört zu dem Implikator von 2.2.2.2.2.4.

Die Gültigkeit von 1.3.4.2 mit diesem Implikator und Konjunktor wird durch die Geltungswertuntersuchung bewiesen.

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	1	222	121	121	
2	0	222	020	020	
2	1	121	212	222	
2	1	121	211	121	
2	0	121	110	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	121	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	1	212	121	211	
2	0	212	020	110	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	1	211	110	110	
2	1	110	202	212	
2	1	110	201	211	
2	1	110	200	110	

2	2	202	222	202
2	1	202	121	201
2	0	202	020	200
2	2	201	212	202
2	2	201	211	201
2	1	201	110	200
2	2	200	202	202
2	2	200	201	201
2	2	200	200	200

Das Gesetz 1.3.6.2 wird von den Implikatoren der letzten drei Tabellen erfüllt.

Der Implikator von 2.2.2.2.2.4 genügt zusätzlich 1.3.6.1. Dieses Gesetz gilt auch für die beiden Implikatoren von Tabelle 2.2.2.2.2.2, wenn C(0,1) = 2 ist.

2.2.2.2.3 C(2,1) = 0

Für C(2,1) = 0 lautet die Tabelle für die möglichen Implikatoren folgendermaßen:

C	2	1	0
2	2	0	0
1		2	
0	2		2

Damit sind 27 Implikatoren möglich. Die Geltungswerttabelle lautet für das Gesetz 1.3.4.1:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
	021		12	222	
	021		211	021	
	021		10	020	
2	020	2	202	222	
	020		01	021	
2	020	0	200	020	
	12		222	12	
	12	2	021	211	Zeile 11
	12		020	10	
2	211	2	12	12	
2	211	2	211	211	
2	211	2	10	10	
	10		202	12	Zeile 16
	10		01	211	
	10		200	10	Zeile 18

2	202	2	222	202	
	202		021	01	Zeile 20
2	202	2	020	200	
	01		12	202	
	01		211	01	
	01		10	200	
2	200	2	202	202	
	200		01	01	
2	200	2	200	200	

Aus Zeile 11 findet man $C(1,2) \neq 1$, da sonst:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
1	112	2	021	211

Setzt man $C(1,0) = 1$, so ergibt sich ein Widerspruch in Zeile 18

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
1	110	0	200	110

Ferner ist $C(0,1) \neq 1$, denn mit $C(0,1) = 1$ erhält man in Zeile 20

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
0	202	1	021	101

Zeile 16 zeigt, daß nicht gleichzeitig $C(1,2) = 0$ und $C(1,0) = 2$ sein kann, sonst erhält man nämlich:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr
0	210	0	202	012

Somit bleiben noch 6 mögliche Implikatoren, nämlich:

Tabelle 2.2.2.2.3.1

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	2/0
0	2	0	2

Tabelle 2.2.2.2.3.2

C	2	1	0
2	2	0	0
1	0	2	0
0	2	2	2

Tabelle 2.2.2.2.3.3

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	2	2/0
0	2	2	2

Tabelle 2.2.2.2.3.4

C	2	1	0
2	2	0	0
1	0	2	0
0	2	0	2

Die zugehörigen Konjunktoren haben die Tabellen:

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2/0	0	0
0	0	2	0

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	0	2
0	0	0	0

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2/0	0	0
0	0	0	0

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	0	2
0	0	2	0

Die folgenden Untersuchungen zeigen die Gültigkeit von 1.3.4.1 und 1.3.4.2 für alle sechs Implikatoren und die entsprechenden Konjunktoren:

Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3.1 mit C(1,0) = 2:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	212	222	
2	021	0	211	021	
2	021	0	210	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	001	021	
2	020	2	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	021	211	
2	212	2	020	210	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	210	210	
2	210	2	202	212	
2	210	2	001	211	
2	210	2	200	210	
2	202	2	222	202	
2	202	2	021	001	
2	202	2	020	200	
2	001	2	212	202	
2	001	0	211	001	
2	001	2	210	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	001	001	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	212	222	
2	0	021	211	021	
2	0	021	210	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	001	021	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	0	212	021	211	
2	0	212	020	210	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	2	211	210	210	
2	2	210	202	212	
2	0	210	001	211	
2	2	210	200	210	

2	2	202	222	202
2	0	202	021	001
2	0	202	020	200
2	0	001	212	202
2	0	001	211	001
2	0	001	210	200
2	2	200	202	202
2	0	200	001	001
2	2	200	200	200

Der Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3.1 mit C(1,0) = 0:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	212	222	
2	021	0	211	021	
2	021	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	001	021	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	021	211	
2	212	2	020	010	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	010	010	
2	010	2	202	212	
2	010	2	001	211	
2	010	0	200	010	
2	202	2	222	202	
2	202	2	021	001	
2	202	2	020	200	
2	001	2	212	202	
2	001	0	211	001	
2	001	2	010	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	001	001	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	212	222	
2	0	021	211	021	
2	0	021	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	001	021	
2	0	020	200	020	

2	2	212	222	212
2	0	212	021	211
2	0	212	020	010
2	2	211	212	212
2	2	211	211	211
2	0	211	010	010
2	0	010	202	212
2	0	010	001	211
2	0	010	200	010
2	2	202	222	202
2	0	202	021	001
2	0	202	020	200
2	0	001	212	202
2	0	001	211	001
2	0	001	010	200
2	2	200	202	202
2	0	200	001	001
2	2	200	200	200

Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3.2:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	012	222	
2	021	0	211	021	
2	021	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	0	201	021	
2	020	0	200	020	
2	012	0	222	012	
2	012	2	021	211	
2	012	2	020	010	
2	211	2	012	012	
2	211	2	211	211	
2	211	2	010	010	
2	010	0	202	012	
2	010	2	201	211	
2	010	0	200	010	
2	202	2	222	202	
2	202	2	021	201	
2	202	2	020	200	
2	201	2	012	202	
2	201	2	211	201	
2	201	2	010	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	201	201	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	012	222	

2	0	021	211	021
2	0	021	010	020
2	0	020	202	222
2	0	020	201	021
2	0	020	200	020
2	0	012	222	012
2	0	012	021	211
2	0	012	020	010
2	0	211	012	012
2	2	211	211	211
2	0	211	010	010
2	0	010	202	012
2	0	010	201	211
2	0	010	200	010
2	2	202	222	202
2	0	202	021	201
2	0	202	020	200
2	0	201	012	202
2	2	201	211	201
2	0	201	010	200
2	2	200	202	202
2	2	200	201	201
2	2	200	200	200

Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3.3 mit C(1',0) = 2:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	212	222	
2	021	0	211	021	
2	021	0	210	020	
2	020	2	202	222	
2	020	0	201	021	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	021	211	
2	212	2	020	210	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	210	210	
2	210	2	202	212	
2	210	2	201	211	
2	210	2	200	210	
2	202	2	222	202	
2	202	2	021	201	
2	202	2	020	200	
2	201	2	212	202	
2	201	2	211	201	
2	201	2	210	200	
2	200	2	202	202	
2	200	2	201	201	
2	200	2	200	200	

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	212	222	
2	0	021	211	021	
2	0	021	210	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	021	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	0	212	021	211	
2	0	212	020	210	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	2	211	210	210	
2	2	210	202	212	
2	2	210	201	211	
2	2	210	200	210	
2	2	202	222	202	
2	0	202	021	201	
2	0	202	020	200	
2	2	201	212	202	
2	2	201	211	201	
2	2	201	210	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Implikator von Tabelle 2.2.2.2.3.3 mit C(1,0) = 0:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	212	222	
2	021	0	211	021	
2	021	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	0	201	021	
2	020	0	200	020	
2	212	2	222	212	
2	212	2	021	211	
2	212	2	020	010	
2	211	2	212	212	
2	211	2	211	211	
2	211	2	010	010	
2	010	2	202	212	
2	010	2	201	211	
2	010	0	200	010	

2	202	2	222	202
2	202	2	021	201
2	202	2	020	200
2	201	2	212	202
2	201	2	211	201
2	201	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	201	201
2	200	2	200	200

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	212	222	
2	0	021	211	021	
2	0	021	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	201	021	
2	0	020	200	020	
2	2	212	222	212	
2	0	212	021	211	
2	0	212	020	010	
2	2	211	212	212	
2	2	211	211	211	
2	0	211	010	010	
2	0	010	202	212	
2	0	010	201	211	
2	0	010	200	010	
2	2	202	222	202	
2	0	202	021	201	
2	0	202	020	200	
2	2	201	212	202	
2	2	201	211	201	
2	0	201	010	200	
2	2	200	202	202	
2	2	200	201	201	
2	2	200	200	200	

Implikator von Tabelle 2.2.2.3.4:

C	Cpq	C	Cqr	Cpr	(1.3.4.1)
2	222	2	222	222	
2	222	2	021	021	
2	222	2	020	020	
2	021	2	012	222	
2	021	0	211	021	
2	021	2	010	020	
2	020	2	202	222	
2	020	2	001	021	
2	020	2	200	020	

2	012	2	222	012
2	012	2	021	211
2	012	2	020	010
2	211	2	012	012
2	211	2	211	211
2	211	2	010	010
2	010	0	202	012
2	010	2	001	211
2	010	0	200	010
2	202	2	222	202
2	202	2	021	001
2	202	2	020	200
2	001	2	012	202
2	001	0	211	001
2	001	2	010	200
2	200	2	202	202
2	200	2	001	001
2	200	2	200	200

C	K	Cpq	Cqr	Cpr	(1.3.4.2)
2	2	222	222	222	
2	0	222	021	021	
2	0	222	020	020	
2	0	021	012	222	
2	0	021	211	021	
2	0	021	010	020	
2	0	020	202	222	
2	0	020	001	021	
2	0	020	200	020	
2	0	012	222	012	
2	0	012	021	211	
2	0	012	020	010	
2	0	211	012	012	
2	2	211	211	211	
2	0	211	010	010	
2	0	010	202	012	
2	0	010	001	211	
2	2	010	200	010	
2	2	202	222	202	
2	0	202	021	001	
2	0	202	020	200	
2	0	001	012	202	
2	0	001	211	001	
2	0	001	010	200	
2	2	200	202	202	
2	0	200	001	001	
2	2	200	200	200	

Für die Implikatoren von Tabelle 2.2.2.2.3.1 gilt nur 1.3.6.2, für den von Tabelle 2.2.2.2.3.2 nur 1.3.6.1. Die Implikatoren von 2.2.2.2.3.3 erfüllen sowohl 1.3.6.1 als auch 1.3.6.2, während der von 2.2.2.2.3.4 weder 1.3.6.1 noch 1.3.6.2 erfüllt.

Zusammenfassung:

Es gibt 24 Implikatoren, die das Transitivitätsgesetz 1.3.4.1 erfüllen und Analoga 1. Art zum zweiwertigen Implikator sind. Für 18 von diesen 24 Implikatoren läßt sich auch das Gesetz 1.3.4.2 beweisen.

2.2.3 Konstruktion von Implikatoren, die die Exportationsgesetze erfüllen

Zum Schluß dieses Kapitels sollen noch die Funktoren getrennt betrachtet werden, die die Exportationsgesetze 1.3.5.1 und 1.3.5.2 erfüllen.

Diese sind insofern interessant, da aus der Gültigkeit des Gesetzes 1.3.5.1 und eines Transitivitätsgesetzes direkt auf die Gültigkeit des anderen Transitivitätsgesetzes geschlossen werden kann, denn:

$$\vdash CKpqr \equiv CpCqr.$$

Ersetzt man nach der Einsetzungsregel:

p / Cpq
q / Cqr
r / Cpr,

so erhält man:

$$\vdash CKCpqCqrCpr \equiv CCpqCCqrCpr,$$

d.h. die beiden Transitivitätsgesetze sind gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch.

2.2.3.1 C(1,1) = 0

Ist C(1,1) = 0, so muß K(1,1) = 2 werden. Dann erhält man für K(0,1) = 1 den Widerspruch:

	C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
⊢	0	1	011		2	0	0	11 .	

Für K(0,1) = 2 ist C(0,1) = 0 und wegen:

	C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
⊢		2	011		2	0	0	11	

wird C(2,1) = 2. Das führt zu folgendem Widerspruch:

C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
0	0	021		2	0	2	21 .	

Daher kann nur K(0,1) = 0 sein.
Für K(0,1) = 0 ist C(0,1) = 2. Dann darf K(2,1) nicht 0 werden, da sonst:

⊢	C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
	1	0	211		0	2	0	11 .	

Somit sind die beiden Fälle K(2,1) = 1 bzw. K(2,1) = 2 zu untersuchen.

2.2.3.1.1 K(2,1) = 1

Man erhält C(2,1) = 1 aus K(2,1) = 1. Dann ergibt sich C(1,0) = 1 und somit K(1,2) = 1 wegen:

⊢	C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
	1	2	111		1	1	0	11.	

Außerdem gilt C(1,2) = 2, also K(1,0) = 0 wegen:

C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
2	2	112		1	1	0	12	
2	2	112		0	1	1	12	
2	2	112		2	1	2	12.	

Die Tabellen für C und K lauten dann:

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	0	1
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	0
0	0	0	0

Die Gültigkeit von 1.3.5.1 wird durch folgende Geltungswertuntersuchung bewiesen:

C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
2	2	222		2	2	2	22	
1	2	221		1	2	1	21	
0	2	220		0	2	0	20	
2	1	212		2	2	2	12	
0	1	211		0	2	0	11	
1	1	210		1	2	1	10	
2	0	202		2	2	2	02	
2	0	201		2	2	2	01	
2	0	200		2	2	2	00	
2	1	122		2	1	2	22	
0	1	121		0	1	1	21	
1	1	120		1	1	0	20	
2	2	112		2	1	2	12	
1	2	111		1	1	0	11	
0	2	110		0	1	1	10	
2	0	102		2	1	2	02	
2	0	101		2	1	2	01	
2	0	100		2	1	2	00	

2	0	022	2	0	2	22
2	0	021	2	0	1	21
2	0	020	2	0	0	20
2	0	012	2	0	2	12
2	0	011	2	0	0	11
2	0	010	2	0	1	10
2	0	002	2	0	2	02
2	0	001	2	0	2	01
2	0	000	2	0	2	00

Da K symmetrisch ist, folgt aus der Gültigkeit von 1.3.5.1 auch die Gültigkeit von 1.3.5.2.

2.2.3.1.2 K(2,1) = 2

Die entsprechenden Überlegungen führen zu folgenden Tabellen für C und K:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	0
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	0
0	0	0	0

Es gilt 1.3.5.1 wegen:

C	K	pqr	≡	C	p	C	qr	(1.3.5.1)
2	2	222		2	2	2	22	
0	2	221		0	2	0	21	
0	2	220		0	2	0	20	
2	2	212		2	2	2	12	
0	2	211		0	2	0	11	
0	2	210		0	2	0	10	
2	0	202		2	2	2	02	
2	0	201		2	2	2	01	
2	0	200		2	2	2	00	
2	2	122		2	1	2	22	
0	2	121		0	1	0	21	
0	2	120		0	1	0	20	
2	2	112		2	1	2	12	
0	2	111		0	1	0	11	
0	2	110		0	1	0	10	
2	0	102		2	1	2	02	
2	0	101		2	1	2	01	
2	0	100		2	1	2	00	
2	0	022		2	0	2	22	
2	0	021		2	0	0	21	
2	0	020		2	0	0	20	
2	0	012		2	0	2	12	
2	0	011		2	0	0	11	
2	0	010		2	0	0	10	
2	0	002		2	0	2	02	
2	0	001		2	0	2	01	
2	0	000		2	0	2	00	

Auch hier ist 1.3.5.2 erfüllt, da K symmetrisch ist.

2.2.3.2 C(1,1) = 1

Durch analoge Untersuchungen erhält man die Gültigkeit von 1.3.5.1 für die nachfolgend aufgeführten Implikatoren und die zugehörigen Konjunktoren:

2.2.3.2.1

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	1	1/0
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	2	0
1	1/2	1	0
0	0	0	0

Für K(1,2) = 2, d.h. C(1,0) = 0, ist K symmetrisch, und somit ist 1.3.5.2 ebenfalls gültig. Mit K(1,2) = 1, d.h. C(1,0) = 1, erfüllen C und K 1.3.5.2 nicht, wegen:

⊬ C	K	pqr	≡ C	q	C	pr
1	1	121	0	2	1	11.

2.2.3.2.2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	2/1
0	2	1	2

K	2	1	0
2	2	1	0
1	0/1	1	0
0	0	1	0

K ist nicht symmetrisch, trotzdem gilt 1.3.5.2 für C(1,0) = 2

C	K	pqr	≡ C	q	C	pr	(1.3.5.2)
2	2	222	2	2	2	22	
1	2	221	1	2	1	21	
0	2	220	0	2	0	20	
2	1	212	2	1	1	22	
1	1	211	1	1	1	21	
2	1	210	2	1	0	20	
2	0	202	2	0	2	22	
1	0	201	1	0	1	21	
2	0	200	2	0	0	20	
2	0	122	2	2	2	12	
1	0	121	1	2	1	11	
2	0	120	2	2	2	10	
2	1	112	2	1	2	12	
1	1	111	1	1	1	11	
2	1	110	2	1	1	10	
2	0	102	2	0	2	12	
1	0	101	1	0	1	11	
2	0	100	2	0	2	10	
2	0	022	2	2	2	02	
1	0	021	1	2	1	01	

2	0	020		2	2	2	00
2	1	012		2	1	2	02
1	1	011		1	1	1	01
2	1	010		2	1	2	00
2	0	002		2	0	2	02
1	0	001		1	0	1	01
2	0	000		2	0	2	00

Für C(1,0) = 1 gilt 1.3.5.2 nicht, denn:

⊢ C	K	pqr	≡ C	q	C	pr
2	0	100	1	0	1	10

2.2.3.2.3

C \	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	2	1	2

K \	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	0	1	0

Wegen der Symmetrie von K ist 1.3.5.2 dann auch bewiesen.

2.2.3.2.4

C \	2	1	0
2	2	1	0
1	1/2	1	1
0	2	2	2

K \	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1/0
0	0	0	0

Für K(1,0) = 0 ist K symmetrisch, und somit ist 1.3.5.2 gezeigt. Für K(1,0) = 1, d.h. C(1,0) = 2 ist K nicht symmetrisch, und 1.3.5.2 ist nicht erfüllt:

⊢ C	K	pqr	≡ C	q	C	pr	(1.3.5.2)
1	1	101	2	0	1	11	

2.2.3.2.5

C \	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	0
0	2	2	2

K \	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	0
0	0	0	0

K ist nicht symmetrisch, trotzdem läßt sich 1.3.5.2 nachweisen:

C	K	pqr	≡ C	q	C	pr	(1.3.5.2)
2	2	222	2	2	2	22	
1	2	221	1	2	1	21	
0	2	220	0	2	0	20	
2	1	212	2	1	2	22	
1	1	211	1	1	1	21	
0	1	210	0	1	0	20	
2	0	202	2	0	2	22	

2	0	201		2	0	1	21
2	0	200		2	0	0	20
2	2	122		2	2	2	12
1	2	121		1	2	1	11
0	2	120		0	2	0	10
2	1	112		2	1	2	12
1	1	111		1	1	1	11
0	1	110		0	1	0	10
2	0	102		2	0	2	12
2	0	101		2	0	1	11
2	0	100		2	0	0	10
2	0	022		2	2	2	02
2	0	021		2	2	2	01
2	0	020		2	2	2	00
2	0	012		2	1	2	02
2	0	011		2	1	2	01
2	0	010		2	1	2	00
2	0	002		2	0	2	02
2	0	001		2	0	2	01
2	0	000		2	0	2	00

2.2.3.2.6

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	1	2
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

K ist symmetrisch, also ist wegen 1.3.5.1 auch 1.3.5.2 erfüllt.

2.2.3.2.7

C	2	1	0
2	2	2	0
1	1	1	1
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0

K ist nicht symmetrisch, 1.3.5.2 gilt nicht, wegen:

C	K	pqr	≡	C	q	C	pr	(1.3.5.2)
2	0	211		1	1	2	21.	

2.2.3.3 C(1,1) = 2

Die Überlegungen für C(1,1) = 2 ergeben die Gültigkeit von 1.3.5.1 für folgende Implikatoren mit den zugehörigen Konjunktoren:

2.2.3.3.1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	2/1
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	1	0
1	0/1	0	0
0	0	0	0

Setzt man C(1,0) = 1, d.h. K(1,2) = 1, so wird K symmetrisch, und es gilt 1.3.5.2. Der Funktor C stimmt dann mit dem überein, der in 2.2.1 alle Gesetze erfüllt.

Für K(1,2) = 0 ist K nicht symmetrisch; trotzdem läßt sich die Gültigkeit von 1.3.5.2 zeigen:

⊢	C	K	pqr	≡	C	q	C	pr	(1.3.5.2)
	2	2	222		2	2	2	22	
	1	2	221		1	2	1	21	
	0	2	220		0	2	0	20	
	2	1	212		2	1	2	22	
	2	1	211		2	1	1	21	
	2	1	210		2	1	0	20	
	2	0	202		2	0	2	22	
	2	0	201		2	0	1	21	
	2	0	200		2	0	0	20	
	2	0	122		2	2	2	12	
	2	0	121		2	2	2	11	
	2	0	120		2	2	2	10	
	2	0	112		2	1	2	12	
	2	0	111		2	1	2	11	
	2	0	110		2	1	2	10	
	2	0	102		2	0	2	12	
	2	0	101		2	0	2	11	
	2	0	100		2	0	2	10	
	2	0	022		2	2	2	02	
	2	0	021		2	2	2	01	
	2	0	020		2	2	2	00	
	2	0	012		2	1	2	02	
	2	0	011		2	1	2	01	
	2	0	010		2	1	2	00	
	2	0	002		2	0	2	02	
	2	0	001		2	0	2	01	
	2	0	000		2	0	2	00	

2.2.3.3.2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	1
0	2	1	2

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	1
0	0	1	0

K ist symmetrisch, somit genügt der Implikator mit dem Konjunktor 1.2.5.2.

2.2.3.3.3

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	2/1
0	2	2	2

K	2	1	0
2	2	0	0
1	0/1	0	0
0	0	0	0

Für K(1,2) = 0 ist K symmetrisch, und 1.3.5.2 ist erfüllt. Für K(1,2) = 1 gilt 1.3.5.2 nicht, da:

C	K	pqr	≡	C	q	C	pr	(1.3.5.2)
2	0	210		1	1	0	20	

Zusammenfassung:
Es gibt 17 Implikatoren, die mit den zugehörigen Konjunktoren das Exportationsgesetz 1.3.5.1 erfüllen. Für 12 dieser Implikatoren und Konjunktoren läßt sich nachweisen, daß auch das Exportationsgesetz 1.3.5.2 gilt.

2.2.4 Erzeugung von Funktoren, für die die Abtrennungsregel gilt

Eine der wichtigsten Schlußregeln bei Beweisen im bivalenten System ist die Abtrennungsregel. Es soll im Folgenden angegeben werden, welche der trivalenten Analoga 1.Art des zweiwertigen Implikators dieses Gesetz erfüllen.

Die Analoga 1.Art des Implikators bzw. Konjunktors lauten:

C	2	1	0
2	2		0
1			
0	2		2

K	2	1	0
2	2		0
1			
0	0		0

Setzt man C(1,1) = 1, d.h. K(1,1) = 1, so ergibt sich

C	K	C	pq	p	q	(1.3.9)
1	1	1	11	1	1	

Somit kann C(1,1) nur die Werte 0 oder 2 annehmen.
Ferner muß C(0,1) ≠ 0 sein, da sonst:

C	K	C	pq	p	q
0	0	0	01	0	1.

2.2.4.1 C(1,1) = 0

Für C(1,1) = 0 ist K(1,1) = 2. Man erhält die Tabellen:

C	2	1	0
2	2		0
1		0	
0	2		2

K	2	1	0
2	2		0
1		2	
0	0		0

C	K	C	pq	p	q	
2	2	2	22	2	2	
			21	2	1	Zeile 2
2	0	0	20	2	0	
			12	1	2	Zeile 4
		0	11	1	1	Zeile 5
			10	1	0	Zeile 6
2	0	2	02	0	2	
			01	0	1	Zeile 8
2	0	2	00	0	0	

2.2.4.1.1 C(2,1) = 0

Mit C(2,1) = 0 ergibt Zeile 2:

C	K	C	pq	p	q
2	0	0	21	2	1 ,

d.h. C(0,1) = 2.

Wegen C(0,1) = 2 gilt K(0,1) = 0, und die Zeilen 8 und 5 werden erfüllt:

C	K	C	pq	p	q	
2	0	2	01	0	1	Zeile 8
2	0	0	11	1	1	Zeile 5

Aus Zeile 6 ergibt sich C(1,0) ≠ 1, denn für C(1,0) = 1 erhält man:

C	K	C	pq	p	q
0	2	1	10	1	0

Für C(1,0) = 2 ergibt Zeile 6:

C	K	C	pq	p	q
0	2	2	10	1	0

Somit ergeben sich drei Funktoren:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2/1/0	0	0
0	2	2	2

2.2.4.1.2 C(2,1) = 1

Die Funktoren haben folgende Tabelle:

C	2	1	0
2	2	1	0
1		0	
0	2		2

K	2	1	0
2	2	1	0
1		2	
0	0		0

Da in Zeile 2, 5 und 8 je eine Implikation mit Hinterglied 1 vorkommt, muß C(0,1) = 2 werden und in diesen Zeilen im Vorderglied jeweils eine 0 entstehen. Aus Zeile 2 folgt dann:K(1,2) = 0, d.h. C(1,0) = 2:

C	K	C	pq	p	q
2	0	1	21	2	1.

Damit erhält man:

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2/1/0	0	2
0	2	2	2

Die Untersuchung zeigt, daß die fünf offenen Zeilen erfüllt werden:

C	K	C	pq	p	q
2	0	1	21	2	1
			12	1	2
2	0	0	11	1	1
2	1	2	10	1	0
2	0	2	01	0	1

C	K	C	pq	p	q
2	0	0	12	1	2
2	2	1	12	1	2
2	1	2	12	1	2

2.2.4.1.3 C(2,1) = 2

Analoge Überlegungen führen zu diesen sechs Funktoren:

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2/1/0	0	2/0
0	2	2	2

2.2.4.2 C(1,1) = 2

In dieser Untersuchung werden die reflexiven Funktoren betrachtet. Die Überlegungen entsprechen denen in 2.2.4.1.

2.2.4.2.1 C(2,1) = 0

Für C(2,1) = 0 ist K(2,1) = 2. Dann ergibt sich aus Zeile 5 folgender Widerspruch:

C	K	C	pq	p	q
0	2	2	11	1	1

2.2.4.2.2 C(2,1) = 1

Es entstehen sieben Funktoren:

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2/0/1	2	1
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	1
0	2	1	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2/1/0	2	2
0	2	2	2

2.2.4.2.3 C(2,1) = 2

Die neun angegebenen Implikatoren genügen der Abtrennungsregel.

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2/1/0	2	2/1/0
0	2	2	2

Zusammenfassung:

Unter den 243 Funktoren, die durch die vier Eckwerte bestimmt werden, existieren 28 Funktoren, für die die Abtrennungsregel Gültigkeit hat, und zwar 12 nicht reflexive und 16 reflexive Funktoren.

2.3 Erstellung von Implikatoren, die die Transitivitätsgesetze erfüllen, aber nicht notwendig Analoga 1.Art sind

In diesem Kapitel sollen die dreiwertigen Funktoren konstruiert werden, die das Transitivitätsgesetz 1.3.4.1 erfüllen, dabei aber nicht die Eckwerte des bivalenten Implikators haben. In einer zweiten Untersuchung wird dann geprüft, ob diese Funktoren mit den zugehörigen Konjunktoren auch dem Gesetz 1.3.4.2 genügen.

Aus der Geltungswertuntersuchung kann man zunächst schließen, daß C(0,0) ≠ 0 sein muß, denn

C C pq C C qr C pr
0 0 00 0 0 00 0 00 ,

d.h. es ergibt sich unter dem Hauptfunktor der Wert 0. Man hat also noch die Fälle C(0,0) = 1 und C(0,0) = 2 zu untersuchen.

2.3.1 Untersuchung der Implikatoren mit C(0,0) = 1

Für C(0,0) = 1 ergibt sich C(1,1) ≠ 1, denn:

C C pq C C qr C pr
1 1 00 1 1 00 1 00 .

2.3.1.1 C(1,1) = 0

Nimmt man nun C(1,1) = 0 an, so erhält man C(0,1) = 2, C(1,0) = 2 und C(2,2) ≠ 1:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	0	11	1	0	11	0	11
2	1	00	0	1	00	1	00
0	1	00	1	2	01	2	01 .

Für C(2,2) = 0 ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	0	11	0	2	10	2	10

Somit verbleibt nur noch C(2,2) = 2.

Wegen

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	0	11	2	2	10	2	10
2	1	00	2	2	01	2	01 ,

folgt C(0,2) = C(1,2) = 2.

Da C(2,0) = 0 und C(2,0) = 1 zum Widerspruch führen:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	10	0	2	01	0	11
1	2	02	0	1	20	1	00 ,

bleibt nur noch C(2,1) = 2 übrig, somit erhält man für die Annahmen C(0,0) = 1 und C(1,1) = 0 genau einen Funktor, der Gleichung 1.3.4.1 erfüllt, nämlich:

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	0	2
0	2	2	1

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	2	21	2	21	
2	2	22	2	2	20	2	20	
2	2	21	2	2	12	2	22	
2	2	21	2	0	11	2	21	
2	2	21	2	2	10	2	20	
2	2	20	2	2	02	2	22	
2	2	20	2	2	01	2	21	
2	2	20	2	1	00	2	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	2	21	0	11	
2	2	12	2	2	20	2	10	
2	0	11	2	2	12	2	12	
2	0	11	1	0	11	0	11	
2	0	11	2	2	10	2	10	
2	2	10	2	2	02	2	12	
2	2	10	2	2	01	0	11	
2	2	10	2	1	00	2	10	

2	2	02	2	2	22	2	02
2	2	02	2	2	21	2	01
2	2	02	2	2	20	1	00
2	2	01	2	2	12	2	02
2	2	01	2	0	11	2	01
2	2	01	2	2	10	1	00
2	1	00	2	2	02	2	02
2	1	00	2	2	01	2	01
2	1	00	0	1	00	1	00

Konstruiert man über Kpq ≡ NCpNq den zugehörigen Konjunktor, so erhält man:

K	2	1	0
2	0	0	0
1	0	2	0
0	1	0	0

Mit diesem Konjunktor gilt jedoch 1.3.4.2 nicht, denn:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
1	0	2	12	2	21	0	11	.

2.3.1.2 C(1,1) = 2

Das Prinzip der Untersuchung ist das gleiche, wie es für den gerade beschriebenen Fall ausführlich dargestellt wurde.

C(0,0) = 1, C(1,1) = 2

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	1	00	2	1	00	1	00

C(1,2) = 2

C(2,2) = 1

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	12	2	1	22	2	12

C(2,2) = 0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	0	22	1	0	22	0	22

C(0,1) = 2

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	2	01	0	2	11	2	01

C(2,0) = 2

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	20	2	1	00	2	20

C(2,2) ≠ 1, C(2,2) ≠ 0 C(2,2) = 2.

Somit gilt:

C	2	1	0
2	2		
1	2	2	
0			1

2.3.1.2.1 Annahme C(0,1) = 1

C(2,1) ≠ 0, denn C(2,1) = 0:

C C pq C C qr C pr

2 1 01 0 2 11 1 01

C(0,1) = 2

C C pq C C qr C pr

0 2 22 1 0 21 0 21

Es bleibt C(2,1) = 1 oder C(2,1) = 2.

2.3.1.2.1.1 Annahme C(2,1) = 1

C(0,2) ≠ 0, denn C(0,2) = 0:

C C pq C C qr C pr

0 0 02 2 1 21 1 01

Übrig ist C(0,2) = 1 oder C(0,2) = 2.

2.3.1.2.1.1.1 C(0,2) = 1 C(1,0) ≠ 0, denn C(1,0) = 0:

C C pq C C qr C pr

1 0 10 2 1 02 2 12

Nun verbleibt C(1,0) = 1 oder C(1,0) = 2.

2.3.1.2.1.1.1.1 Annahme C(1,0) = 1 C(2,0) ≠ 2, denn C(2,0) = 2:

C C pq C C qr C pr

1 2 12 1 2 20 1 10

Außerdem muß C(2,0) ≠ 0, denn C(2,0) = 0:

C C pq C C qr C pr

1 0 20 2 1 02 2 22

Also ergibt sich: C(2,0) = 1.

Man erhält die Tabelle:

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	2	1
0	1	1	1

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	1	21	1	21	
2	2	22	2	1	20	1	20	
2	1	21	2	2	12	2	22	
2	1	21	1	2	11	1	21	
2	1	21	2	1	10	1	20	
2	1	20	2	1	02	2	22	
2	1	20	2	1	01	1	21	
2	1	20	2	1	00	1	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	1	21	2	11	
2	2	12	2	1	20	1	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	2	11	2	1	10	1	10	
2	1	10	2	1	02	2	12	
2	1	10	2	1	01	2	11	
2	1	10	2	1	00	1	10	
2	1	02	1	2	22	1	02	
2	1	02	2	1	21	1	01	
2	1	02	2	1	20	1	00	
2	1	01	1	2	12	1	02	
2	1	01	1	2	11	1	01	
2	1	01	2	1	10	1	00	
2	1	00	2	1	02	1	02	
2	1	00	2	1	01	1	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

Der zugehörige Konjunktor lautet:

K	2	1	0
2	1	1	0
1	1	0	0
0	1	1	1

Die Überprüfung von 1.3.4.2 zeigt, daß mit diesem Konjunktor ein Widerspruch entsteht:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
1	0	1	10	1	02	2	12	

2.3.1.2.1.1.1.2 C(1,0) = 2

C(1,0) = 2 C(2,0) ≠ 0, denn

C	C	pq	C	C	qr	C	pq	
1	0	20	2	1	02	2	22	,

also muß C(2,0) = 1 oder C(2,0) = 2 sein, somit ergeben sich folgende Tabellen für C und K:

C	2	1	0
2	2	1	1/2
1	2	2	2
0	1	1	1

K	2	1	0
2	0/1	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1

Die vollständige Geltungswertuntersuchung zeigt die Gültigkeit von 1.3.4.1 für die beiden Implikatoren der Tabelle:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	2	21	2	21	
2	2	22	2	1/2	20	1/2	20	
2	1	21	2	2	12	2	22	
2	1	21	2	2	11	2	21	
2	1	21	1/2	2	10	1/2	20	
2	1/2	20	2	1	02	2	22	
2	1/2	20	2	1	01	2	21	
2	1/2	20	2	1	00	1/2	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	1	21	2	11	
2	2	12	2	1/2	20	2	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	2	11	2	2	10	2	10	
2	2	10	2	1	02	2	12	
2	2	10	2	1	01	2	11	
2	2	10	2	1	00	2	10	
2	1	02	1	2	22	1	02	
2	1	02	2	1	21	1	01	
2	1	02	2/1	1/2	20	1	00	
2	1	01	1	2	12	1	02	
2	1	01	1	2	11	1	01	
2	1	01	1	2	10	1	00	
2	1	00	2	1	02	1	02	
2	1	00	2	1	01	1	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

1.3.4.2 gilt nicht wegen:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
1	0	1	02	1	21	1	01

2.3.1.2.1.1.2 C(0,2) = 2

Wegen:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	02	1	2	20	1	00
1	2	22	1	0	20	0	20

kann C(2,0) weder 2 noch 0 werden, somit muß C(2,0) = 1 sein.
Ferner darf C(1,0) nicht 0 werden, da sonst:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	11	1	0	10	0	10 .

Damit erhält man:

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	2	2/1
0	2	1	1

K	2	1	0
2	1	1	0
1	0/1	0	0
0	1	1	0

Es gilt 1.3.4.1:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	1	21	1	21	
2	2	22	2	1	20	1	20	
2	1	21	2	2	12	2	22	
2	1	21	1	2	11	1	21	
2	1	21	1/2	2/1	10	1	20	
2	1	20	2	2	02	2	22	
2	1	20	2	1	01	1	21	
2	1	20	2	1	00	1	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	1	21	2	11	
2	2	12	2	1	20	2/1	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	2	11	2	2/1	10	2/1	10	
2	2/1	10	2	2	02	2	12	
2	2/1	10	2	1	01	2	11	
2	2/1	10	2	1	00	2/1	10	
2	2	02	2	2	22	2	02	
2	2	02	2	1	21	1	01	
2	2	02	2	1	20	1	00	
2	1	01	2	2	12	2	02	
2	1	01	1	2	11	1	01	
2	1	01	1/2	1/2	10	1	00	
2	1	00	2	2	02	2	02	
2	1	00	2	1	01	1	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

Wegen

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	
1	0	1	20	1	01	1	21	gilt 1.3.4.2 nicht.

2.3.1.2.1.2 C(2,1) = 2

Wegen

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	0	02	2	2	21	1	01

muß C(0,2) ≠ 0 sein.

2.3.1.2.1.2.1 C(0,2) = 1

Wegen

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	0	10	2	1	01	2	11
1	0	20	2	1	01	2	21

müssen C(1,0) ≠ 0 und C(2,0) ≠ 0 sein. Damit ergeben sich folgende vier Implikatoren mit den zugehörigen Konjunktoren:

C	2	1	0
2	2	2	1/2
1	2	2	1/2
0	1	1	1

K	2	1	0
2	1/0	0	0
1	1/0	0	0
0	1	1	1

Es gilt:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	2	21	2	21	
2	2	22	2	1/2	20	1/2	20	
2	2	21	2	2	12	2	22	
2	2	21	2	2	11	2	21	
2	2	21	2	1/2	10	1/2	20	
2	1/2	20	2	1	02	2	22	
2	1/2	20	2	1	01	2	21	
2	1/2	20	2	1	00	1/2	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	2	21	2	11	
2	2	12	2	2/1	20	1/2	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	2	11	2	2/1	10	1/2	10	
2	1/2	10	2	1	02	2	12	
2	1/2	10	2	1	01	2	11	
2	1/2	10	2	1	00	1/2	10	
2	1	02	2	2	22	1	02	
2	1	02	2	2	21	1	01	
2	1	02	2	1/2	20	1	00	
2	1	01	2	2	12	1	02	
2	1	01	2	2	11	1	01	
2	1	01	2	1/2	10	1	00	
2	1	00	2	1	02	1	02	
2	1	00	2	1	01	1	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

Wegen

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
1	0	1	00	1	01	1	01

gilt 1.3.4.2 nicht.

2.3.1.2.1.2.2 C(0,2) = 2

Aus C(2,0) = 0 folgt C(1,0) = 2, denn es ist

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
	0	20		1	00	0	20 ,

und C(0,a) = 2 gilt nur für a = 2. Mit C(1,0) = 2 ergibt sich aber:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	21	0	2	10	0	20 .

Deshalb kann C(2,0) nicht 0 sein.
Es sind noch die Fälle C(2,0) = 1 und C(2,0) = 2 zu betrachten.

2.3.1.2.1.2.2.1 C(2,0) = 1

Mit C(2,0) = 1 ergibt sich C(1,0) ≠ 0, denn

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	12	0	1	20	0	10 .

Somit lauten die Tabellen:

C \	2	1	0
2	2	2	1
1	2	2	1/2
0	2	1	1

K \	2	1	0
2	1	0	0
1	1/0	0	0
0	1	1	0

Es ist (1.3.4.1)

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	2	22	2	2	22	2	22
2	2	22	2	2	21	2	21
2	2	22	2	1	20	1	20
2	2	21	2	2	12	2	22
2	2	21	2	2	11	2	21
2	2	21	2	1/2	10	1	20
2	1	20	2	2	02	2	22
2	1	20	2	1	01	2	21
2	1	20	2	1	00	1	20
2	2	12	2	2	22	2	12
2	2	12	2	2	21	2	11
2	2	12	2	1	20	1/2	10
2	2	11	2	2	12	2	12
2	2	11	2	2	11	2	11
2	2	11	2	1/2	10	1/2	10
2	1/2	10	2	2	02	2	12
2	1/2	10	2	1	01	2	11
2	1/2	10	2	1	00	1/2	10
2	2	02	2	2	22	2	02
2	2	02	2	2	21	1	01
2	2	02	2	1	20	1	00
2	1	01	2	2	12	2	02
2	1	01	2	2	11	1	01
2	1	01	2	1/2	10	1	00
2	1	00	2	2	02	2	02
2	1	00	2	1	01	1	01
2	1	00	2	1	00	1	00

Aber wegen:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
1	0	1	00	1	00	1	00

gilt 1.3.4.2 nicht.

2.3.1.2.1.2.2.2 C(2,0) = 2

Es gilt C(1,0) ≠ 0, denn für C(1,0) = 0 erhält man:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	0	10	0	1	00	0	10 .

Die Implikatoren heißen:

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	1/2
0	2	1	1

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	2	21	2	21	
2	2	22	2	2	20	2	20	
2	2	21	2	2	12	2	22	
2	2	21	2	2	11	2	21	
2	2	21	2	1/2	10	2	20	
2	2	20	2	2	02	2	22	
2	2	20	2	1	01	2	21	
2	2	20	2	1	00	2	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	2	21	2	11	
2	2	12	2	2	20	1/2	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	2	11	2	1/2	10	1/2	10	
2	1/2	10	2	2	02	2	12	
2	1/2	10	2	1	01	2	11	
2	1/2	10	2	1	00	1/2	10	
2	2	02	2	2	22	2	02	
2	2	02	2	2	21	1	01	
2	2	02	2	2	20	1	00	
2	1	01	2	2	12	2	02	
2	1	01	2	2	11	1	01	
2	1	01	2	1/2	10	1	00	
2	1	00	2	2	02	2	02	
2	1	00	2	1	01	1	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

Der zugehörige Funktor K muß K(1,1) = 0 erfüllen.

Somit gilt 1.3.4.2 nicht wegen

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
1	0	1	00	1	00	1	00 .

2.3.1.2.2 C(0,1) = 0

C(0,0) = 1, C(1,1) = 2 und C(0,1) = 0

C(1,2) = 2, denn

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
2	0	01	2	2	11	0	01 .

Ferner muß C(2,1) ≠ 1 und C(2,1) ≠ 0 sein, da

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	02	1	2	20	1	00
1	2	02	1	0	21	0	01 .

Also muß C(2,1) = 2 werden. Zuletzt ergibt sich, daß C(1,0) ≠ 0 ist, da sonst

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	0	01	0	0	10	1	00 .

Man erhält:

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	1/2
0	2	0	1

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	22	2	2	22	2	22	
2	2	22	2	2	21	2	21	
2	2	22	2	2	20	2	20	
2	2	21	2	2	12	2	22	
2	2	21	2	2	11	2	21	
2	2	21	2	1/2	10	2	20	
2	2	20	2	2	02	2	22	
2	2	20	2	0	01	2	21	
2	2	20	2	1	00	2	20	
2	2	12	2	2	22	2	12	
2	2	12	2	2	21	2	11	
2	1/2	12	2	2	20	1/2	10	
2	2	11	2	2	12	2	12	
2	2	11	2	2	11	2	11	
2	1/2	11	2	1/2	10	1/2	10	
2	2	10	2	2	02	2	12	
2	2	10	2	0	01	2	11	
2	1/2	10	2	1	00	1/2	10	
2	2	02	2	2	22	2	02	
2	2	02	2	2	21	0	01	
2	2	02	2	2	20	1	00	
2	0	01	2	2	12	2	02	
2	0	01	2	2	11	0	01	
2	0	01	2	1/2	10	1	00	
2	1	00	2	2	02	2	02	
2	1	00	1	0	01	0	01	
2	1	00	2	1	00	1	00	

Wegen C(1,1) = 2 muß K(1,1) = 0 werden. Daher folgt:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
0	0	1	00	1	00	1	00 ,

d.h. 1.3.4.2 gilt nicht.

2.3.1.2.3 C(0,1) = 2

C(0,0) = 1, C(1,1) = 2, C(2,2) = 2, C(1,2) = 2
Für C(1,0) = 0 ist

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	0	10	0	1	00	0	10 ,

also muß C(1,0) ≠ 0 sein.

2.3.1.2.3.1 C(1,0) = 2
Für C(2,1) = 1 ist

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
1	2	01	1	2	10	1	00 ,

und bei C(2,1) = 0 gilt

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	22	1	0	21	0	21 .

Es muß C(2,1) = 2 sein.
Für C(2,0) = 0 ergibt sich

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	2	21	0	2	10	0	20 ,

und für C(0,2) = 0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr
0	0	02	2	2	21	2	01 .

Also muß C(2,0) ≠ 0 und C(0,2) ≠ 0 sein, und man erhält für C:

C	2	1	0
2	2	2	1/2
1	2	2	2
0	1/2	2	1

Man sieht, daß 1.3.4.1 erfüllt ist, da für jede Belegung von p, q und r immer eine 1 oder 2 entsteht, und jede Kombination von 1 und 2 zu 2 führt.

K:

K	2	1	0
2	1/0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	1/0

C K C pq C qr C pr (1.3.4.2)

Aus der Tabelle für C sieht man, daß Cpr nur die Werte 1 oder 2 annimmt, somit gilt auch 1.3.4.2 immer, wenn C(0,2) ≠ 1 ist, da dann unabhängig vom Vorderglied für 2 und 1 im Hinterglied sich immer 2 ergibt.

Für C(0,2) = 1 wird K(0,0) = 1 und

C	K	C	pq	C	qr	C	pr
1	0	2	10	1	00	2	10 .

Deshalb gilt dann 1.3.4.2 nicht.

2.3.1.2.3.2 C(1,0) = 1

Für C(2,1) = 0 ergibt sich

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
0	2	22	1	0	21	0	21 ,	

also muß C(2,1) ≠ 0 sein.

Mit C(0,2) = 0 erhält man:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
1	1	10	0	0	02	2	12 .	

Somit kann C(0,2) noch die Werte 1 oder 2 annehmen.

2.3.1.2.3.2.1 C(2,1) = 2

C:

C	2	1	0
2	2	2	1/2
1	2	2	1
0	1/2	2	1

erfüllt 1.3.4.1, da bei jeder Geltungswertbelegung nur entweder eine 1 oder eine 2 entsteht und sich bei jeder Kombination von 1 und 2 wieder eine 2 ergibt.

K	2	1	0
2	1/0	0	0
1	1	0	0
0	1	0	1/0

Ist C(0,2) = 2, so gilt 1.3.4.2 immer, da das Implikans nur 0 oder 1, das Implikat nur 1 oder 2 werden kann und sich bei Kombinationen dieser Art nur eine 2 ergibt.

Für C(0,2) = C(2,0) = 1, d.h. K(0,0) = K(2,2) = 1, ist 1.3.4.2 nicht erfüllt, denn

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
1	0	1	20	2	01	2	21 .	

Mit C(0,2) = 1 und C(2,0) = 2, d.h. K(0,0) = 1 und K(2,2) = 0, ergibt sich in 1.3.4.2 ein Widerspruch, denn

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
1	0	2	22	2	22	2	22 .	

Für C(2,0) = 0 muß sich C(0,2) = 2 ergeben, da

C C pq C C qr C pr (1.3.4.1)
2 0 20 2 2 01 2 21 ,

also wird C:

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	1
0	2	2	1

Dieser Funktor erfüllt 1.3.4.1, es sind nur die drei Möglichkeiten zu betrachten, bei denen das Implikat 0 werden kann:

C C pq C C qr C pr (1.3.4.1)
2 2 22 1 0 20 0 20
2 2 21 1 1 10 0 20
2 0 20 1 1 00 0 20

1.3.4.2 kann nicht gelten, denn:

C K C pq C qr C pr (1.3.4.2)
0 20 .

Ist das Implikat 0, so kann die Implikation unabhängig vom Implikans nie wahr sein.

2.3.1.2.3.2.2 C(2,1) = 1:

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	2	1
0	2	2	1

K	2	1	0
2	1	1	0
1	1	0	0
0	1	0	0

Für C ist 1.3.4.1 erfüllt, für C und K gilt auch 1.3.4.2, denn im Implikans entsteht nur eine 1 oder 0, da es sich um eine Konjunktion handelt, im Implikat nur eine 1 oder 2, da es sich um eine Implikation handelt. Eine Implikation mit 0 oder 1 im Vorderglied und 2 oder 1 im Hinterglied führt aber nach der Tabelle von C immer zu einer 2.

Zusammenfassung:

Es gibt 26 Implikatoren C mit C(0,0) = 1, für die das Transitivitätsgesetz 1.3.4.1 gilt. Konstruiert man über Kpq ≡ NCpNq die zugehörigen Konjunktoren und überprüft das Gesetz 1.3.4.2 mit den Implikatoren und Konjunktoren, so läßt sich nur in fünf der 26 Fälle eine Gültigkeit von 1.3.4.2 erreichen.

2.3.2 Betrachtung der Funktoren für C(0,0) = 2

Die Konstruktion der Implikatoren erfolgt analog zu der in 2.3.1. Es sollen hier nur die Ergebnisse angegeben werden.

2.3.2.1 C(1,1) = 0

Aus C(1,1) = 0 ergibt sich C(0,2) = 2, denn:

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	0	11	2	0	11	0	11 .	

Die Fälle C(2,2) = 0 und C(2,2) = 1 ergeben jeweils einen Widerspruch:

C(2,2)=0

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
0	2	02	2	0	22	2	02	

C(2,2) = 1: C(2,1) = 2, denn

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
2	2	00	1	2	00	2	00	

C(2,2) = 1 und C(2,1) = 2

C	C	pq	C	C	qr	C	pr	(1.3.4.1)
0	1	22	1	2	21	2	21	

Es ist also C(2,2) = 2.

2.3.2.1.1 C(1,0) = 1

In diesem Fall ergeben sich folgende zwei Implikatoren:

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	0	1
0	2	0/2	2

Beide erfüllen mit den jeweiligen Konjunktoren 1.3.4.2 nicht.

2.3.2.1.2 C(1,0) = 0

Man erhält 13 Funktoren:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2/0	0	0
0	2	0	2

1.3.4.2 ist erfüllt. Es handelt sich um Analoga 1.Art des zweiwertigen Implikators

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	0
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

Analogon 1.Art

C	2	1	0
2	2	2/0	0
1	0	0	0
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	0/2	2
1	0/2	0	0
0	2	0/2	2

1.3.4.2 gilt

Analogon 1.Art

2.3.2.1.3 C(1,0) = 2

Für folgende 10 Implikatoren gilt 1.3.4.1:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0	2
0	2	0	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	0/2	2
1	0/2	0	2
0	2	0	2

1.3.4.2 gilt

Analogon 1.Art

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2	0	2
0	2	0	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2/0	2
1	2/0	0	2
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

2.3.2.2 C(1,1) = 2

Die Fälle C(2,2) = 0 und C(2,2) = 1 führen zum Widerspruch, damit bleibt nur der Fall C(2,2) = 2 zu betrachten, d.h. die 729 Implikatoren mit folgender Tabelle:

C	2	1	0
2	2		
1		2	
0			2

Es handelt sich um alle dreiwertigen Funktoren, die reflexiv sind.

2.3.2.2.1 C(2,0) = 0

2.3.2.2.1.1 C(0,2) = 0

Das Gesetz 1.3.4.1 wird von folgenden sechs Funktoren erfüllt:

C	2	1	0
2	2	1/2	0
1	2	2	0
0	0	0	2

1.3.4.2 wird für C(2,1) = 2 erfüllt, für C(2,1) ≠ 1 jedoch nicht

C	2	1	0
2	2	1/0	0
1	1/0	2	2
0	0	2	2

1.3.4.2 gilt nur für C(2,1) = C(1,2) = 0

2.3.2.2.1.2 C(0,2) = 1

1.3.4.1 gilt für die 5 Implikatoren folgender Tabelle:

C	2	1	0
2	2	1	0
1	0	2	1
0	1	0	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	1/0	0
1	1/0	2	2
0	1	2	2

1.3.4.2 gilt nicht

2.3.2.2.1.3 C(0,2) = 2

Man erhält die Tabelle:

C	2	1	0
2	2		0
1		2	
0	2		2

d.h. es werden genau die 81 reflexiven Implikatoren betrachtet, die Analoga 1.Art des bivalenten Implikators sind. Für diesen Fall lassen sich 18 Implikatoren konstruieren, die 1.3.4.1 erfüllen:

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2/0	2	0
0	2	0	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	1/0	0
1	2	2	2
0	2	0	2

1.3.4.2 gilt für C(2,1) = 0, nicht für C(2,1) = 1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	0
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	1
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2	1
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	2
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2/0	0
1	0	2	0
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2	0
0	2	1	2

1.3.4.2. gilt nicht

C	2	2	0
2	2	2/1/00	
1	2	2	0
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	2/1	0
1	2	2	1
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	1/0	0
1	2	2	2
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt

In 13 von 18 Fällen ist 1.3.4.2 erfüllt.

2.3.2.2.2 C(2,0) = 1

Es handelt sich um die 243 reflexiven Funktoren der Form:

C	2	1	0
2	2		1
1		2	
0			2

2.3.2.2.2.1 C(0,2) = 0

1.3.4.1 wird von genau zwei Funktoren erfüllt:

C	2	1	0
2	2	1/0	1
1	0	2	2
0	0	2	2

1.3.4.2 gilt nicht

2.3.2.2.2.2 C(0,2) = 1

Es gibt 10 Funktoren, für die 1.3.4.1 gilt:

C	2	1	0
2	2	1/0	1
1	1/0	2	2
0	1	2	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	2	1/2
0	1	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	1
1	2	2	1
0	1	1/2	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	1
1	2	2	2
0	1	2/1	2

1.3.4.2 gilt nicht

2.3.2.2.2.3 C(0,2) = 2

Man kann 9 Implikatoren konstruieren, die 1.3.4.1 erfüllen:

C	2	1	0
2	2	2/1	1
1	2	2	1
0	2	2/1	2

1.3.4.2 gilt für C(0,1) = 2, nicht für C(0,1) = 1

C	2	1	0
2	2	2/1	1
1	2	2	2
0	2	2/1	2

1.3.4.2 gilt nur für C(0,1) = 2

C	2	1	0
2	2	0	1
1	2	2	2
0	2	2	2

1.3.4.2 gilt nicht

2.3.2.2.3 C(2,0) = 2

Die Funktoren haben folgende Form:

C	2	1	0
2	2		2
1		2	
0			2

Da C(0,2) = 0 zum Widerspruch führt, bleibt C(0,2) = 1 oder C(0,2) = 2.

2.3.2.2.3.1 C(0,2) = 1

Für folgende fünf Funktoren gilt 1.3.4.1:

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2	2	2
0	1	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	2/1
0	1	2/1	2

1.3.4.2 gilt nicht

2.3.2.2.3.2 C(0,2) = 2

1.3.4.1 wird von 26 Funktoren erfüllt:

C	2	1	0
2	2	2/0	2
1	2/0	2	2/0
0	2	2/0	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	1	2
1	1	2	1
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	2/1/0
0	2	1	2

1.3.4.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	1
0	2	2/0	2

1.3.4.2 gilt nur für C(0,1) = 2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2	2	2/0
0	2	1/0	2

1.3.4.2 gilt nicht

Zusammenfassung:

Es gibt 106 Funktoren mit C(0,0) = 2, die das Transitivitätsgesetz 1.3.4.1 erfüllen. Für 60 dieser Funktoren gilt gleichzeitig auch 1.3.4.2.

2.4 Erzeugung trivalenter Funktoren, die den Exportationsgesetzen genügen, ohne Analoga 1.Art zu sein

In diesem Kapitel sollen alle Funktoren erzeugt werden, die das Exportationsgesetz 1.3.5.1 erfüllen. Dabei werden nur solche betrachtet, die keine Analoga 1.Art sind, da die anderen schon in Abschnitt 2.2.3 betrachtet wurden. Es werden der Reihe nach die noch verbleibenden 80 Eckwertkombinationen untersucht. Durch jede mögliche Kombination sind 243 Funktoren bestimmt, d.h. es gibt 19 440 Fälle.

2.4.1 Untersuchung für C(2,2) = 2

2.4.1.1 C(2,0) = 2

Unter den 2 187 möglichen Funktoren gibt es 10 Funktoren, die 1.3.5.1 erfüllen, in 8 von den 10 Fällen gilt auch 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	2	0	2
1	2	1	2/0
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt für C(1,0) = 0, nicht für C(1,0) = 2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2	1	2
0	2	1	2

1.3.5.2 gilt
K nicht symmetrisch

C	2	1	0
2	2	1	2
1	1	2/1	1
0	2	1	2

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	2	2	2
1	1	1	1
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	1	0
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt
K nicht symmetrisch

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2/1/0	2
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt

2.4.1.2 C(2,0) = 1

Für fünf Funktoren gilt 1.3.5.1, in allen Fällen wird auch 1.3.5.2 erfüllt:

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	1	1
0	2/1	2	2

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	1	1
0	2	1	1

C	2	1	0
2	2	0	1
1	2	1	0
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	2	1
1	2	2	2
0	2	2	2

K nicht symmetrisch

2.4.1.3 C(2,0) = 0

Hierbei werden die Funktoren folgender Tabelle nicht betrachtet:

C	2	1	0
2	2		0
1			
0	2		2

Es handelt sich um die 243 Fälle, die Analoga 1.Art zum bivalenten Implikator sind und in 2.2.3 getrennt betrachtet wurden.

Für 15 Funktoren gilt 1.3.5.1. Es läßt sich zeigen, daß auch 1.3.5.2 von diesen Funktoren außer in zwei Fällen erfüllt wird. In drei Fällen erhält man C ≡ K. Ersetzt man in 1.3.5.1 K durch C, so ergibt sich:

$$\vdash C\ \ K\ \ pq\ \ r \equiv C\ \ p\ \ C\ \ qr \qquad (1.3.5.1)$$
$$\vdash C\ \ C\ \ pq\ \ r \equiv C\ \ p\ \ C\ \ qr\ ,$$

d.h. C (und damit K) ist assoziativ.

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	1	0
0	2	2	0

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	1	1
0	1	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

In allen anderen Fällen gilt 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1

$\vdash C \equiv K$

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	0	1	2

$\vdash C \equiv K$

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	0
0	2	1	0

$\vdash C \equiv K$

C	2	1	0
2	2	2	0
1	2	2/1	0
0	2	2	0

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	1/0	0
0	2	0	0

C	2	1	0
2	2	2	0
1	0	0	2
0	0	0	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	0	2	1
0	1	0	2

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2	0/1	0
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	1	1
0	2	1	1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	1	1
0	1	1	2

Zusammenfassung:

Von 6 318 betrachteten Fällen gilt das Gesetz 1.3.5.1 30mal, dabei ergab sich in 26 Fällen auch die Gültigkeit von 1.3.5.2.

2.4.2 Entwicklung der Funktoren mit C(2,2) = 1

2.4.2.1 C(2,0) = 2

1.3.5.1 gilt in drei Fällen. Da immer ein symmetrischer Konjunktor entsteht, gilt auch 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	1	2	2
1	1	2	2
0	2	1	1

C	2	1	0
2	1	1	2
1	1	1	1
0	1	1	1

C	2	1	0
2	1	0	2
1	2	1	0
0	0	2	1

2.4.2.2 C(2,0) = 1

Die Gültigkeit von 1.3.5.1 läßt sich für sieben Funktoren erweisen. Nur in einem Fall gilt 1.3.5.2 nicht, zweimal wird C ≡ K:

C	2	1	0
2	1	1	1
1	1	1	1
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	1	1	1
1	1	1	1
0	2	1	0

C	2	1	0
2	1	2	1
1	2	1	2
0	1	2	1

⊬C ≡ K

C	2	1	0
2	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1

C	2	1	0
2	1	1	1
1	1	1	1
0	2/1/0	1	1

für C(0,2) = 1:
C ≡ K

2.4.2.3 C(2,0) = 0

In fünf der sieben angegebenen Fälle gilt außer 1.3.5.1 auch 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	1
0	2/1	1	1

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	1	1	0
1	0	0	1
0	0	0	1

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	0
0	2/1	1	0

1.3.5.2 gilt
K nicht symmetrisch

C	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	1
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	2

1.3.5.2 gilt

Zusammenfassung:

17 von den 6561 möglichen Funktoren genügen dem Gesetz 1.3.5.1. In drei dieser 17 Fälle wird 1.3.5.2 nicht erfüllt.

2.4.3 Betrachtung der Implikatoren mit C(2,2) = 0

2.4.3.1 C(2,0) = 2

Die vier Funktoren, die 1.3.5.1 erfüllen, genügen gleichzeitig 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	0	0	2
1	2	1/2	0
0	2	2	0

K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	2	2
1	0	2	2
0	2	0	0

C	2	1	0
2	0	1	2
1	1	1	1
0	2	1	0

2.4.3.2 C(2,0) = 1

Hier gilt 1.3.5.1 für fünf Funktoren:

C	2	1	0
2	0	0	1
1	1	1	0
0	2/1	1	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	2	1
1	1	0	2
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	1	1
1	1	1	1
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	1	1
1	1	1	1
0	2	1	1

1.3.5.2 gilt nicht

2.4.3.3 C(2,0) = 0

Es lassen sich 33 Funktoren konstruieren, für die 1.3.5.1 wahr ist, 19mal gilt auch 1.3.5.2:

C	2	1	0
2	0	1	0
1	1	1/0	1
0	0	1	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	1	0
1	0	1	0
0	0	1	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2/0	1	0
0	0	2	0

1.3.5.2 gilt nicht für C(1,2) = 0,
für C(1,2) = 2 ist K symmetrisch
und 1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	0	2/1/0	0
0	0	0	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2	1	0
0	0	0	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	0
0	1	1	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	1
0	1	1	1

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2	1	0
0	1	2	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	0	1/0	0
0	2	0	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	0	0
0	2	0	0

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	1
0	2	1/0	0

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2	1	0
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	0
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	0	0	0
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2/1	1	0
0	2	2	0

1.3.5.2 gilt nur für
C(1,2) = 2, dann ist
K symmetrisch

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	1
0	2	1	1

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2/0	1	0
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	0	0	0
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	0	0
1	2	1/2	2
0	2	2	2

1.3.5.2 gilt nicht

C	2	1	0
2	0	1	0
1	0/1	1	0
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt für
C(1,2) = 0, nicht
für C(1,2) = 1

C	2	1	0
2	0	1	0
1	1	1	1
0	2	1	0

1.3.5.2 gilt

C	2	1	0
2	0	1	0
1	1	1	1
0	2	1	2

1.3.5.2 gilt nicht

Zusammenfassung:

Für C(2,0) = 0 existieren 42 Funktoren, bei denen das Exportationsgesetz 1.3.5.1 Gültigkeit hat. In 27 Fällen läßt sich gleichzeitig erreichen, daß 1.3.5.2 erfüllt wird.

2.5 Konstruktion von Implikatoren, die der Abtrennungsregel genügen, aber keine Analoga 1.Art sind

2.5.1 Untersuchung der Funktoren mit C(2,2) = 0

Für C(2,2) = 0 wird K(2,0) = 2. Aus Zeile 1 folgt K(0,2) ≠ 2, da sonst:

C	K	C	pq	p	q	(1.3.9)
0	2	0	22	2	2	Zeile 1
			21	2	1	Zeile 2
			20	2	0	Zeile 3
			12	1	2	Zeile 4
			11	1	1	Zeile 5
			10	1	0	Zeile 6
			02	0	2	Zeile 7
			01	0	1	Zeile 8
			00	0	0	Zeile 9

Somit kann K(0,2) die Werte 0 oder 1 annehmen.

2.5.1.1 K(0,2) = 1

Mit K(0,2) = 1 wird C(0,0) = 1. Zeile 1 lautet dann:

C	K	C	pq	p	q	(1.3.5)
1	0	22	2	2	Zeile 1	

und daher wird C(1,2) = 2, d.h. K(1,0) = 0. Setzt man diese Werte in Zeile 9 ein, so erhält man den Widerspruch:

C	K	C	pq	p	q
1	0	1	00	0	0

2.5.1.2 K(0,2) = 0

Mit K(0,2) = 0 in Zeile 1 ist C(0,2) = 2:

C	K	C	pq	p	q
2	0	0	22	2	2 .

Mit C(0,2) = 2 ergibt sich in Zeile 7:

C	K	C	pq	p	q
0	2	2	02	0	2

Zusammenfassung:

Es läßt sich kein trivalenter Funktor C mit C(2,2) = 0 und einem zugehörigen Funktor K: Kpq ≡ NCpNq konstruieren, so daß die Abtrennungsregel CKCpqpq gilt.

2.5.2 Betrachtung der Funktoren für C(2,2) = 1

Mit C(2,2) = 1 erhält man K(2,0) = 1. Für C(2,2) = 1 lautet Zeile 1:

C	K	C	pq	p	q	
		1	22	2	2	Zeile 1

K(1,2) darf daher nicht 2 werden. Für K(1,2) = 1 ergibt sich C(1,0) = 1, und es ist:

C	K	C	pq	p	q	
2	1	1	22	2	2	Zeile 1 ,

also C(1,2) = 2, d.h. K(1,0) = 0.

Für C(0,2) = 0, d.h. K(0,0) = 2 und C(0,2) = 1 entsteht in Zeile 7 je ein Widerspruch:

C	K	C	pq	p	q	
1	2	0	02	0	2	Zeile 7
1	0	1	02	0	2	Zeile 7

Insgesamt wird C(0,2) = 2, also K(0,0) = 0.

In Zeile 9 führt dann aber C(0,0) = 0, C(0,0) = 1 und C(0,0) = 2 zum Widerspruch:

C	K	C	pq	p	q	
0	0	0	00	0	0	Zeile 9
1	0	1	00	0	0	Zeile 9
1	1	2	00	0	0	Zeile 9

Es gibt also keinen Funktor mit der gewünschten Eigenschaft und K(1,2) = 1. Dann bleibt der Fall K(1,2) = 0 zu betrachten.

Für K(1,2) = 0 erhält man aus Zeile 1 C(0,2) = 2:

C	K	C	pq	p	q	
2	0	1	22	2	2	Zeile 1

Setzt man C(0,2) = 2 in Zeile 7 ein, so ergibt sich C(1,2) = 2

C	K	C	pq	p	q	
2	1	2	02	0	2	Zeile 7

C(0,2) = 2 führt zu K(0,0) = 0 und C(1,2) = 2 zu K(1,0) = 0.

Für C(0,0) = 0 und C(0,0) = 1 lautet Zeile 9:

C	K	C	pq	p	q	
0	0	0	00	0	0	Zeile 9
1	0	1	00	0	0	Zeile 9

Es bleibt C(0,0) = 2, also K(0,2) = 0.

Ebenso führt in Zeile 8 C(0,1) = 0 und C(0,1) = 1 zum Widerspruch:

C	K	C	pq	p	q	
0	0	0	01	0	1	Zeile 8
1	0	1	01	0	1	Zeile 8

Es wird C(0,1) = 2 und K(0,1) = 0. Damit erhält man in Zeile 8 C(1,1) = 2:

C	K	C	pq	p	q	
2	1	2	01	0	1	Zeile 8

Insgesamt gilt:

C \	2	1	0
2	1		
1	2	2	2
0	2	2	2

K \	2	1	0
2			1
1	0	0	0
0	0	0	0

Die Tabelle für 1.3.9 lautet:

C	K	C	pq	p	q	
2	0	1	22	2	2	Zeile 1
			21	2	1	Zeile 2
			20	2	0	Zeile 3
		2	12	1	2	Zeile 4
		2	11	1	1	Zeile 5
		2	10	1	0	Zeile 6
2	1	2	02	0	2	Zeile 7
2	1	2	01	0	1	Zeile 8
2	1	2	00	0	0	Zeile 9

Aus Zeile 4 ergibt sich K(2,1) ≠ 2. K(2,1) kann aber sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 annehmen, da unabhängig vom Hinterglied C in beiden Fällen 2 ergibt. Also kann C(2,1) die Werte 2 und 1 annehmen. Nachzuprüfen ist, ob Zeile 2 erfüllt wird. C(2,1) = 2 und C(2,1) = 1 ergeben in Zeile 2:

C	K	C	pq	p	q	
2	1	2	21	2	1	Zeile 2
2	0	1	21	2	1	Zeile 2.

Offen bleibt noch der Wert für C(2,0) und die Frage der Gültigkeit von Zeile 3. Für C(2,0) = 0 und C(2,0) = 1 ergibt Zeile 3:

C	K	C	pq	p	q	
2	0	0	20	2	0	Zeile 3
2	0	1	20	2	0	Zeile 3

C(2,0) = 2 führt zu K(2,2) = 0, und man erhält in Zeile 3:

C	K	C	pq	p	q	
2	0	2	20	2	0	Zeile 3

Zusammenfassung:

Unter 6561 möglichen Funktoren C mit C(2,2) = 1 lassen sich genau sechs finden, die mit den zugehörigen Konjunktoren der Abtrennungsregel genügen.
Diese sechs Funktoren sind durch folgende Tabelle bestimmt:

C	2	1	0
2	1	2/1	2/1/0
1	2	2	2
0	2	2	2

2.5.3 Ermittlung der Implikatoren mit C(2,2) = 2

2.5.3.1 C(2,0) = 0

Außer den in 2.2.4 untersuchten Analoga 1.Art gibt es weitere 14 Funktoren, für die 1.3.9 gilt.

C	2	1	0
2	2	0	0
1	2/1	0	0
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2	1
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	2	2/0	2
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	2/0	2
0	2	2	1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	2
0	0	2	1

C	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	2
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	2	0
1	1	0	2/0
0	0	2	2

C	2	1	0
2	2	2	0
1	0	0	2
0	0	0	2

C	2	1	0
2	2	1	0
1	0	2	1
0	1	0	2

C	2	1	0
2	2	2	0
1	1	0	2
0	0	0	2

2.5.3.2 C(2,0) = 1

Es gibt drei Implikatoren C mit C(2,2) = 2 und C(2,0) = 1, die 1.3.9 erfüllen:

C	2	1	0
2	2	2/1	1
1	2	2	2
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	1	1
1	2	2	2
0	0	2	2

2.5.3.3 C(2,0) = 2

Man kann 37 Funktoren so konstruieren, daß 1.3.9 Gültigkeit hat:

C	2	1	0
2	2	2	2
1	2/1/0	2/0	2/1/0
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2	2	1
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	1	2	1
0	2	2/1	2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	0	2	1
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	1	2
1	2/1/0	2/0	2
0	2	2	2

C	2	1	0
2	2	0	2
1	2/1/0	0	2/1/0
0	2	2	2

Zusammenfassung:

Von den 6561 Funktoren C mit C(2,2) = 2 erfüllen außer den in 2.2.4 angegebenen noch 54 weitere Funktoren die Abtrennungsregel.

3.1 Vergleich der konstruierten Implikatoren mit denen bekannter dreiwertiger Systeme

Der Abschnitt 2.2.1 hat gezeigt, daß es genau einen dreiwertigen Implikator gibt, der die strukturellen Eigenschaften 1.3.3 bis 1.3.9 des zweiwertigen Implikators besitzt und ein Analogon 1.Art zum bivalenten Implikator ist. Dieser Implikator ist derjenige, den Lukasiewicz als Implikator in seinem dreiwertigen System gewählt hat. Allerdings enthält das Lukasiewicz'sche System nicht den über die Gleichung

$$\dashv Kpq \equiv NCpNq$$

dazugehörigen Konjunktor

K	2	1	0
2	2	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0.

Der Lukasiewicz'sche Konjunktor K_L unterscheidet sich von dem oben erwähnten K durch $K_L(1,1) = 1$, d.h. er hält das zweiwertige Gesetz $K_L pp \equiv p$ bei. Da Lukasiewicz einen anderen Konjunktor wählt, erfüllt der Implikator in seinem System jedoch nicht alle Gesetze.

Daß die in den Systemen von Bochvar und Kleene gewählten Implikatoren nicht gleichzeitig alle Gesetze 1.3.3 bis 1.3.9 erfüllen, ist sofort an den in Abschnitt 1.5 aufgeführten Matrizen abzulesen, da in der Hauptdiagonale jeweils an der Stelle C(1,1) eine 1 und keine 2 steht. Damit ist der jeweilige Implikator nicht reflexiv.

Im Abschnitt 2.2.2 hat sich ergeben, daß Implikatoren dieses Aufbaus das Transitivitätsgesetz 1.3.4.1 nicht erfüllen. Die Gültigkeit der Exportationsgesetze 1.3.5.1 und 1.3.5.2 ist in 2.2.3 sowohl für den Bochvar'schen als auch für den Kleene'schen Implikator bewiesen worden.

An den Tabellen läßt sich für den Kleene'schen Implikator die Gültigkeit der unter 1.3.6 genannten Gesetze direkt ableser. Dagegen gelten beide Gesetze für den Implikator von Bochvar nicht. Ebenso sieht man an den Tabellen, daß für beide Implikatoren 1.3.7 und 1.3.8 erfüllt werden. Vergleicht man mit den Ergebnissen in Abschnitt 2.2.4, so stellt man fest, daß beide Implikatoren der Abtrennungsregel nicht genügen.

Der Post'sche Implikator gehört zu denen, die keine Analoga 1.Art zum bivalenten Implikator sind. Vergleicht man die Ergebnisse der Abschnitte 2.3 bis 2.5 dieser Arbeit, so läßt sich feststellen, daß es unter den dort konstruierten Implikatoren keinen gibt, der alle Eigenschaften 1.3.3 bis 1.3.9 gleichzeitig erfüllt. Daraus läßt sich allerdings noch nicht schließen, daß der Post'sche Implikator zusammen mit dem Post'schen Konjunktor die Eigenschaften 1.3.4.2, 1.3.5 und 1.3.9 nicht erfüllt, da der dieser Arbeit zugrunde liegende Negator sich von dem Post'schen Negator durch die Beibehaltung der Eckwerte unterscheidet.

Daß der Post'sche Implikator 1.3.6.1, 1.3.6.2, 1.3.7 und 1.3.8 erfüllt, läßt sich jedoch ebenso aus seiner Matrix ablesen wie die Nichtgültigkeit von 1.3.3.

3.2 Analyse der Ergebnisse der Kapitel 2.3 bis 2.5

Wenn man sich die Ergebnisse der Untersuchungen in den Kapiteln 2.3 bis 2.5 ansieht, so kann man feststellen, daß sich einige der dort konstruierten Funktoren nicht als dreiwertige Implikatoren eignen, da sie Analoga 1.Art zu anderen zweiwertigen Funktoren sind. Diese zweiwertigen Funktoren müssen natürlich auch den jeweils entsprechenden Gesetzen genügen. So sind z.B. unter den Funktoren, die so konstruiert wurden, daß sie dem Transitivitätsgesetz genügen, solche, die Analoga 1.Art zum zweiwertigen Äquivalentor sind, denn im bivalenten System ist der Äquivalentor transitiv. Ferner gilt im Zweiwertigen auch

$$VVpqVVqrVpr,$$

wobei V der Tautologator ist, d.h. daß er an jeder Stelle den Wahrheitswert w hat. Somit ergeben sich unter den konstruierten Funktoren auch solche, die an allen vier Eckwerten eine 2 haben.

Bei der Konstruktion von Funktoren, die den Exportationsgesetzen genügen, haben sich Analoga 1.Art zum zweiwertigen Kontravalentor J ergeben. Der über die Gleichung $Fpq \equiv NJpNq$ definierte Funktor F stellt im Zweiwertigen ebenfalls den Kontravalentor dar, so daß das Exportationsgesetz 1.3.5.1 $CKpqr \equiv CpCqr$ in das Gesetz

$$\vdash JJpqr \equiv JpJqr$$

übergeht. Diese Gleichung besagt die Assoziativität des konstruierten Funktors J.

3.3 Beispiel einer Untersuchung mit einem Zyklator als Negator

Zum Schluß der Arbeit soll an Beispielen gezeigt werden, wie sich die Ergebnisse der Untersuchungen ändern können, wenn nicht der Negator N verwandt wird, sondern entsprechend dem Post'schen Ansatz einer der beiden Zyklatoren:

p	Z_1p	Z_2p
2	1	0
1	0	2
0	2	1

Der Implikator

C |	2	1	0
2	2	2	2
1	2	2	2
0	2	1	2

gehört zu denjenigen 24 Implikatoren, die in 2.3.2.3.2 so konstruiert wurden, daß 1.3.4.1 gilt. Die Gültigkeit von 1.3.4.1 läßt sich durch folgende Geltungswertuntersuchung nachweisen:

C	C pq	C	C qr	C pr	(1.3.4.1)
2	2 22	2	2 22	2 22	
2	2 22	2	2 21	2 21	
2	2 22	2	2 20	2 20	
2	2 21	2	2 12	2 22	
2	2 21	2	2 11	2 21	
2	2 21	2	2 10	2 20	
2	2 20	2	2 02	2 22	
2	2 20	2	1 01	2 21	
2	2 20	2	2 00	2 20	
2	2 12	2	2 22	2 12	
2	2 12	2	2 21	2 11	
2	2 12	2	2 20	2 10	
2	2 11	2	2 12	2 12	
2	2 11	2	2 11	2 11	
2	2 11	2	2 10	2 10	
2	2 10	2	2 02	2 12	
2	2 10	2	1 01	2 11	
2	2 10	2	2 00	2 10	

C	C pq	C	C qr	C pr
2	2 02	2	2 22	2 02
2	2 02	2	2 21	1 01
2	2 02	2	2 20	2 00
2	1 01	2	2 12	2 02
2	1 01	2	2 11	1 01
2	1 01	2	2 10	2 00
2	2 00	2	2 02	2 02
2	2 00	2	1 01	1 01
2	2 00	2	2 00	2 00

Verwendet man als Negator den Funktor N:

p	N p
2	0
1	1
0	2

so erhält man über K pq ≡ N C p N q den zu C korrespondierenden Funktor K:

K pq	≡	N	C p	N q
0 22		0	2 2	0 2
0 21		0	2 2	1 1
0 20		0	2 2	2 0
0 12		0	2 1	0 2
0 11		0	2 1	1 1
0 10		0	2 1	2 0
0 02		0	2 0	0 2
1 01		1	1 0	1 1
0 00		0	2 0	2 0

Also hat K folgende Tabelle:

K	2	1	0
2	0	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

Mit diesem Konjunktor K gilt 1.3.4.2 jedoch nicht, denn:

C	K	C	pq	C	qr	C	pr	(1.3.4.2)
1	0	2	00	1	01	1	01	

Verwendet man jedoch den Zyklator Z_1 als Negator, so erhält man über K_1 pq ≡ Z_1 C p Z_1 q den zu C korrespondierenden Konjunktor K_1:

K_1 pq	≡	Z_1	C p	Z_1 q
1 22		1	2 2	1 2
1 21		1	2 2	0 1
1 20		1	2 2	2 0

K_1	pq	≡	Z_1	C	p	Z_1	q
1	12		1	2	1	1	2
1	11		1	2	1	0	1
1	10		1	2	1	2	0
0	02		0	1	0	1	2
1	01		1	2	0	0	1
1	00		1	2	0	2	0

K_1	2	1	0
2	1	1	1
1	1	1	1
0	0	1	1

Mit diesem Konjunktor K_1 gilt 1.3.4.2, denn:

C	K_1	C pq	C qr	C pr	(1.3.4.2)
2	1	2 22	2 22	2 22	
2	1	2 22	2 21	2 21	
2	1	2 22	2 20	2 20	
2	1	2 21	2 12	2 22	
2	1	2 21	2 11	2 21	
2	1	2 21	2 10	2 20	
2	1	2 20	2 02	2 22	
2	1	2 20	1 01	2 21	
2	1	2 20	2 00	2 20	
2	1	2 12	2 22	2 12	
2	1	2 12	2 21	2 11	
2	1	2 12	2 20	2 10	
2	1	2 11	2 12	2 12	
2	1	2 11	2 11	2 11	
2	1	2 11	2 10	2 10	
2	1	2 10	2 02	2 12	
2	1	2 10	1 01	2 11	
2	1	2 10	2 00	2 10	
2	1	2 02	2 22	2 02	
2	1	2 02	2 21	1 01	
2	1	2 02	2 20	2 00	
2	1	1 01	2 12	2 02	
2	1	1 01	2 11	1 01	
2	1	1 01	2 10	2 00	
2	1	2 00	2 02	2 02	
2	1	2 00	1 01	1 01	
2	1	2 00	2 00	2 00	

Im Folgenden soll untersucht werden, ob mit K_1 auch die Exportationsgesetze 1.3.5.1 und 1.3.5.2 und die Abtrennungsregel 1.3.9 erfüllt werden.

Das Exportationsgesetz 1.3.5.1 lautet:

C	K_1	pq	r	≡	C	p	C	qr	
2	1	22	2		2	2	2	22	
2	1	22	1		2	2	2	21	
2	1	22	0		2	2	2	20	
2	1	21	2		2	2	2	12	
2	1	21	1		2	2	2	11	
2	1	21	0		2	2	2	10	
2	1	20	2		2	2	2	02	
2	1	20	1		2	2	1	01	
2	1	20	0		2	2	2	00	
2	1	12	2		2	1	2	22	
2	1	12	1		2	1	2	21	
2	1	12	0		2	1	2	20	
2	1	11	2		2	1	2	12	
2	1	11	1		2	1	2	11	
2	1	11	0		2	1	2	10	
2	1	10	2		2	1	2	02	
2	1	10	1		2	1	1	01	
2	1	10	0		2	1	2	00	
2	0	02	2		2	0	2	22	
1	0	02	1		2	0	2	21	Zeile 20
2	0	02	0		2	0	2	20	
2	1	01	2		2	0	2	12	
2	1	01	1		2	0	2	11	
2	1	01	0		2	0	2	10	
2	1	00	2		2	0	2	02	
2	1	00	1		1	0	1	01	Zeile 26
2	1	00	0		2	0	2	00	

Aus den Zeilen 20 und 26 wird ersichtlich, daß 1.3.5.1 nicht gilt.

Das Gesetz 1.3.5.2 lautet:

C	K_1	pq	r	≡	C	q	C	pr
2	1	22	2		2	2	2	22
2	1	22	1		2	2	2	21
2	1	22	0		2	2	2	20
2	1	21	2		2	1	2	22
2	1	21	1		2	1	2	21
2	1	21	0		2	1	2	20
2	1	20	2		2	0	2	22
2	1	20	1		2	0	2	21
2	1	20	0		2	0	2	20
2	1	12	2		2	2	2	12
2	1	12	1		2	2	2	11
2	1	12	0		2	2	2	10
2	1	11	2		2	1	2	12
2	1	11	1		2	1	2	11
2	1	11	0		2	1	2	10
2	1	10	2		2	0	2	12
2	1	10	1		2	0	2	11
2	1	10	0		2	0	2	10

C	K_1	pq	r	≡	C	q	C	pr	
2	0	02	2		2	2	2	02	
1	0	02	1		2	2	1	01	Zeile 20
2	0	02	0		2	2	2	00	
2	1	01	2		2	1	2	02	
2	1	01	1		2	1	1	01	
2	1	01	0		2	1	2	00	
2	1	00	2		2	0	2	02	
2	1	00	1		1	0	1	01	Zeile 26
2	1	00	0		2	0	2	00	

Man sieht aus den Zeilen 20 und 26, daß 1.3.5.2 nicht gilt. Vergleicht man jedoch die Untersuchungen zur Gültigkeit von 1.3.5.1 und 1.3.5.2, so läßt sich aus den Tabellen erkennen, daß folgendes Gesetz erfüllt wird:

$$\vdash C\ p\ \ C\ qr \equiv C\ q\ \ C\ pr$$

Die Abtrennungsregel lautet:

C	K_1	C	pq	p	q	(1.3.9)
2	1	2	22	2	2	
2	1	2	21	2	1	
2	1	2	20	2	0	
2	1	2	12	1	2	
2	1	2	11	1	1	
2	1	2	10	1	0	
2	1	2	02	0	2	
2	1	1	01	0	1	
2	1	2	00	0	0	

Es ergibt sich also, daß mit K_1 die Abtrennungsregel erfüllt ist.

Für den mit dem Negator N definierten Konjunktor K war die Abtrennungsregel hingegen nicht erfüllt, denn:

C	K	C	pq	p	q	(1.3.9)
2	0	2	22	2	2	
1	0	2	21	2	1	Zeile 2
2	0	2	20	2	0	
2	0	2	12	1	2	
1	0	2	11	1	1	Zeile 5
2	0	2	10	1	0	
2	0	2	02	0	2	
1	0	1	01	0	1	Zeile 8
2	0	2	00	0	0	

In den Zeilen 2, 5 und 8 steht jeweils eine 1 unter dem Hauptfunktor, es müßte sich jedoch jeweils eine 2 ergeben.

Zusammenfassung:

Da in allen bekannten dreiwertigen Systemen einige Gesetze der zweiwertigen Logik erhalten bleiben, während andere Gesetze verworfen werden müssen, habe ich zunächst untersucht, ob es grundsätzlich möglich ist, ein dreiwertiges System S' so zu konstruieren, daß es ein Untersystem enthält, das dem klassischen zweiwertigen System S isomorph ist. Es hat sich dabei gezeigt, daß es nicht möglich ist, ein System S' von 16 dreiwertigen Funktoren so anzugeben, daß genau alle Gesetze des zweiwertigen Systems S in S' ebenfalls gültig sind.

In einem weiteren Schritt habe ich nach einem Implikator gesucht, der möglichst viele Eigenschaften des bivalenten Implikators beibehalten sollte. Wurde von dem Implikator gefordert, daß er in den vier Eckwerten mit den Werten des zweiwertigen Implikators übereinstimmt, so ließ sich genau ein Implikator finden, der gleichzeitig alle aufgeführten Bedingungen erfüllt:

- er ist reflexiv
- er ist transitiv
- es ergibt sich der Wert 2, wenn
  an erster Stelle der Matrix 0 steht: 'ex falso sequitur quodlibet'
  und
  an zweiter Stelle der Matrix 2 steht: 'verum sequitur ex quolibet'
- das Implikans ist nicht stärker als das Implikat

Ein Vergleich mit den bisherigen Systemen hat ergeben, daß es sich dabei genau um den Implikator handelt, den Lukasiewicz zum Aufbau seines Systems verwandt hat. Lukasiewicz benutzte jedoch einen anderen Konjunktor als den, der über

$$K\ p\ q \equiv N\ C\ p\ N\ q$$

mit dem Implikator verbunden ist.

Für die weiteren Überlegungen habe ich mich zunächst auf die Betrachtung der 243 Implikatoren beschränkt, die in den vier Eckwerten mit den Werten des zweiwertigen Implikators übereinstimmen, also ein Analogon erster Art sind.

Bei der Transitivitätsuntersuchung konnte ich 18 Implikatoren konstruieren, die sowohl das Transitivitätsgesetz

$$\vdash C\ C\ pq\ C\ C\ q\ r\ C\ p\ r$$

als auch das Transitivitätsgesetz

$$\vdash C\ K\ C\ p\ q\ C\ q\ r\ C\ p\ r$$

erfüllen. Darüber hinaus ließen sich sechs weitere Implikatoren angeben, die nur dem ersten der beiden Gesetze genügen.

Unter den genannten 243 Implikatoren existieren 12, die die Exportationsgesetze

$$\vdash C\ K\ p\ q\ r \equiv C\ p\ C\ q\ r$$

und

$$\vdash C\ K\ p\ q\ r \equiv C\ q\ C\ p\ r$$

gleichzeitig, und weitere fünf, die nur das erste Gesetz erfüllen.

Die Ermittlung derjenigen Implikatoren, für die die Abtrennungsregel gilt, hat zu 16 reflexiven und 12 nicht reflexiven, also insgesamt 28 Funktoren geführt.

Danach wurde die Bedingung der Übereinstimmung der Eckwerte mit den Belegungen des bivalenten Implikators fallengelassen. Dadurch mußten jeweils alle 19 683 dreiwertigen Funktoren auf die Gültigkeit der entsprechenden Gesetze untersucht werden.

Durch Überprüfung auf Transitivität konnten 132 Funktoren ausgesondert werden, die nach

$$\vdash C\ C\ p\ q\ C\ C\ q\ r\ C\ p\ r$$

transitiv sind. Von diesen 132 Funktoren erfüllen 65 gleichzeitig die Transitivitätsbedingung

$$\vdash C\ K\ C\ p\ q\ C\ q\ r\ C\ p\ r$$

106 trivalente Funktoren genügen dem Exportationsgesetz

$$\vdash C\ K\ p\ q\ r \equiv C\ p\ C\ q\ r$$

davon lassen sich 79 so angeben, daß gleichzeitig

$$\vdash C\ K\ p\ q\ r \equiv C\ q\ C\ p\ r$$

gilt. Auffällig ist hierbei, daß die Symmetrie von K hinreichend, aber keineswegs notwendig für die gleichzeitige Gültigkeit beider Exportationsgesetze ist.

88 Implikatoren erfüllen mit den zugehörigen Konjunktoren den modus ponens:

$$\vdash C\ K\ C\ p\ q\ p\ q$$

Verwendet man zur Konstruktion des Konjunktors statt des üblichen Negators einen der drei möglichen Zyklatoren, so kann es auftreten, daß Sätze, die vorher keine Allgemeingültigkeit hatten, nun bewiesen werden können. Dies habe ich an Hand eines Beispiels aufgezeigt.

Anmerkungen zum Kapitel 1.2

1) Aristoteles: De Interpretatione IX, 18b,
2) Hugh Mac Coll: The Calculus of Equivalent Statements, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 28, Seite 156 - 183, S. 555 - 579; vol. 29, Seite 98 - 109
3) Hartshorne, Weiss (Herausgeber): Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Harvard University Press 1933; 4.12 - 20, 4.257 - 265
4) Vasil'év: O častnyx suždênijâx, o trêugol'nikê protivopoložnostêj, o zakonê iskljucennogo četvertogo
Učenič zapiski Kazan'skojo Universitêta Oktober 1910, Seite 47 ff;
Voobražaêmajâ logika: Konspekt lektsii, Kazan'skojo Universitêta 1911, Seite 6 ff;
Voobražaêmaja (nêaristotêlêva) logika, Zurnal Ministêrstva Narodnogo ProsvêršČenijâ 1912, Band 40, Seite 207 - 246;
Logika i mêtalogika, Logos, vol. 2-3, 1912/13, Seite 53 - 81
5) Lukasiewicz wandte ein, daß man das System besser als 'nicht-chrysippisch' bezeichnen sollte, da Chrysippos streng auf dem Prinzip der Bivalenz bestanden hat. Vgl. dazu Lukasiewicz: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, Comptes rendus des séances de la Sociêtê des Sciences et des Lettres de Varsovie; Classe III, vol. 23, 1930, Seite 51 - 57
6) Vgl. Kline: N.A. Vasil'ev and the Development of Many-valued Logics Contributions to Logic and Methodology in Honor of J.M. Bocheński, Amsterdam 1965, Seite 315 - 326
7) Edwin Guthrie: The Field of Logic, Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods 1916, vol. 13, Seite 152 - 158
8) Lukasiewicz: O logice trôjwartościowej, Ruch filozoficzny 1920, vol. 5, Seite 170 - 171
Englische Übersetzung: On Three-Valued Logic, in: Storrs McCall: Polish Logic, Oxford University Press 1967, Seite 16 - 18
und bei:
Borkowski (Herausgeber): Lukasiewicz selected Works, North Holland Publishing Company, Amsterdam/London 1970, Seite 87 - 89
9) Post: Introduction to a General Theory of Elementary Propositions American Journal of Mathematics 1921, vol. 43, Seite 163 - 185
nachgedruckt in:

Jan van Heijenoort: From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, Cambridge Mass 1967, Seite 265 - 283

10) Wajsberg: Aksjomatyzacja trôjwartŝciowego rachunku zdân Comptes rendus des sêances de la Sociêtê des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III vol. 24 (1931), Seite 126 - 148, englische Übersetzung in:
Storrs McCall: Polish Logic Oxford 1967, Seite 264 - 284
Axiomatization of three-valued propositional calculus

11) Rosser/Turquette: Many - valued Logics, Amsterdam 1952

12) Rescher: Many - Valued Logic, McGraw-Hill Book Company New York 1969.

Anmerkung zu 1.3

1) Peter Rutz: Zweiwertige und mehrwertige Logik, Ehrenwirth Verlag München, 1973

Anmerkung zu 1.4

Rescher: Many- Valued Logic, McGraw Hill Book Company, 1969

1) Seite 23
2) Seite 29f
3) Seite 34
4) Seite 53

Anmerkung zu 2.2

1) Der Nachweis der Abtrennungsregel erfolgt in 2.2.4

Literaturverzeichnis

Ackermann, Robert

Introduction to Many-valued Logics,
Routledge & Kegan Paul, London, 1967;

Asser, Günther

Die endlichwertigen Lukasiewicz'schen Aussagenkalküle, Berlin 1953;

Bocheński, Innocent Marie Joseph

Formale Logik
Freiburg/München, K.Alber Verlag, 1956;

Bocheński, Innocent Marie Joseph/Menne, Albert

Grundriß der Logistik
Paderborn, F.Schöningh, 1973;

Borkowski, Ludevik

Lukasiewicz selected Works
North Holland Publishing Company, Amsterdam/London, 1970;

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan

Ober die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie
Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol.154, 1925;

Chang, Cheng Chung

Algebraic analysis of many-valued logics
Transactions of the American Mathematical Society, vol.88, 1958

Church, Alonzo

Introduction to Mathematical Logic
Princeton, Princeton University Press, 1956;

Dienes, Zoltan Paul

On an Implication Function in Many-valued Systems of Logic
The Journal of Symbolic Logic, vol.14, 1949;

Evans, Trevor/Hardy, Lane

Sheffer stroke functions in many-valued logics
Portugaliae Mathematica, vol.16, 1957;

Evans, Trevor/Schwartz, Ralph

On Slupecki-T-Funktions
The Journal of Symbolic Logic, vol.23, 1958;

Frey, Gerhard

Bemerkungen zum Problem der mehrwertigen Logiken
Actes du XIe Congrès international de Phil., Amsterdam, vol.5, 1953;

Götlind, Erik

Some Sheffer Functions in n-Valued Logic
Portugaliae Mathematica, vol.11, 1952;

Guthrie, Edwin

The Field of Logic
Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, vol.13, 1916;

Hackstaff, Lawrence/Bocheński, Innocent Marie Joseph

A study in many-valued logic
Studies in Soviet Thought, vol.2, 1962;

Hartshorne, Charles/Weiss, Paul

Collected Papers of Charles Sanders Peirce
Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1934;

Heijenoort, Jean van

From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic
Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967;

Hoo, Tzu-hua

m-Valued Sub-System of (m,n)-Valued Propositional Calculus
The Journal of Symbolic Logic, vol.14, 1949;

Kalicki, Jan
A Test for the Existence of Tautologies According to Many-Valued Truth-tables
The Journal of Symbolic Logic, vol.15, 1950;

Kleene, Stephen,C.

On a Notation for Ordinal Numbers
The Journal of Symbolic Logic, vol.3, 1938;

Kline, George

N.A. Vail'ev and the Development of Many-valued Logics Contributions to Logic and Methodology in Honor of I.M.Bocheński
North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965;

Kneale, William/Kneale, Martha

The Development of Logic
Clarendon Press, Oxford, 1962;

Lewis, Clarence Irving

Note Concerning Many-valued Logical Systems
The Journal of Philosophy, vol.30, 1933;

Linke, Paul F.

Die mehrwertigen Logiken und das Wahrheitsproblem
Zeitschrift für philosophische Forschung, vol.3, 1948;

Lukasiewicz, Jan

Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles
Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie,
Classe de Philosophie, Cracow, 1910;

Lukasiewicz, Jan

O logice trôjwartościowej
Ruch filozoficzny, vol.5, 1920;

Lukasiewicz, Jan

Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagekalküls,
Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres
de Varsovie, Classe III, vol.23, 1930;

Lukasiewicz, Jan

Zur vollen dreiwertigen Aussagenlogik
Erkenntnis, vol.5, 1935/36;

MacColl, Hugh

The Calculus of Equivalent Statements
Proceedings of the London Mathematical Society, vol.28, 1896/97,
vol.29, 1897/98;

Martin, Gottfried

Über ein zweiwertiges Modell einer vierwertigen Logik
Methodos, vol.1, 1949;

Martin, Norman M.

Some Analogues of the Sheffer Stroke Function in n-Valued Logic
Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,
Proceedings of the section of sciences, vol.53, 1950;

Martin, Norman M.

A Note on Sheffer Functions in n-Valued Logic
Methodos, vol.3, 1951;

McCall, Storrs

Polish Logic
Oxford University Press, 1967;

Menne, Albert

Über monadische Valenzfunktoren
Memorias del XIII Congresso Internacional de Filosofia, vol.V,
Mexico City, 1964;

Menne, Albert

Einführung in die Logik
Francke Verlag, München, 1966;

Post, Emil L.

Introduction to a General Theory of Elementary Propositions,
American Journal of Mathematics, vol.43, 1921;

Rescher, Nicholas

Many-Valued Logic
Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1969;

Rose, Alan

A Lattice-theoretic Charcterization of Three-valued Logic,
Journal of the London Mathematical Society, vol.25, 1950;

Rose, Alan

Completeness of Lukasiewicz-Tarski Propositional Calculi,
Mathematische Annalen, vol.122, 1950;

Rose, Alan

Axiom Systems for Three-valued Logic
The Journal of the London Mathematical Society, vol.26, 1951;

Rose, Alan

An Axiom System for Three-valued Logic
Methodos, vol.3, 1951;

Rose, Alan

A Formalisation of Post's m-Valued Propositional Calculus
Mathematische Zeitschrift, vol.56, 1952;

Rose, Alan

The Degree of Completeness of the m-Valued Lukasiewicz Propositional Calculus
The Journal of the London Mathematical Society, vol.27, 1952;

Rose, Alan

Some Generalized Sheffer Functions
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.48, 1952;

Rose, Alan

The m-Valued Calculus of Non-contradiction
The Journal of Symbolic Logic, vol.18, 1953;

Rosser, James Barkley

Many-valued Logic
School Science and Mathematics, vol.41, 1941;

Rosser, James Barkley

On the Many-valued Logics
American Journal of Physics, vol.9, 1941;

Rosser, James Barkley

Axiomatization of Infinite-valued Logics
Logique et Analyse, vol.3, 1960;

Rosser, James Barkley/Turquette, Atwell R.

Axiom Schemes for m-Valued Propositional Calculi
The Journal of Symbolic Logic, vol.10, 1945;

Rosser, James Barkley/ Turquette, Atwell R.

A Note on the Deductive Completeness of m-Valued Propositional Logic,
The Journal of Symbolic Logic, vol.14, 1949;

Rosser, James Barkley/Turquette, Atwell R.

Many-valued Logics
North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1952;

Rutz, Peter

Zweiwertige und mehrwertige Logik
Ehrenwirth Verlag München, 1973;

Salomaa, Arto

On Many-valued Systems of Logic
Ajatus, vol.22, 1959;

Schock, Rolf

On Denumerably Many-valued Logics
Logique et Analyse, vol.7, 1964;

Schock, Rolf

On Finitely Many-valued Logics
Logique et Analyse, vol.7, 1964;

Scholz, Heinrich

Geschichte der Logik
Berlin, 1931;

Slupecki, Jerzy

Der volle dreiwertige Aussagenkalkül
Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol.29, 1936;

Sobociński, Boleslaw

Axiomatization of a Partical System of Three-valued Calculus of Propositions
The Journal of Computing Systems, vol.1, 1952;

Sugihara, Takeo

Negation in Many-valued Logic
Memoirs of Liberal Arts College, Fukui University, vol.1, 1952;

Vasil'êv, Nikolai, A.

O castnyx suzdênijâx, o trêugol'nikê protivopoloznostéj, o zakonê iskljûcennogo cêtvertogo
Ucenië zapiski Kazan'skojo Universitêta, 1910;

Vasil'êv, Nikolai, A.

Voobrazaêmajâ logika: Konspekt lektsii
Kazan'skojo Universitêta, 1911;

Vasil'êv, Nikolai, A.

Voobrazaêmajâ (nêaristotêlêva) logika
Zurnal Ministêrstva Narodnogo Prosvêrscenijâ, 1912;

Vasil'êv, Nikolai, A.

Logika i mêtalogika
Logos, vol.2/3, 1912/13;

Vasil'êv, Nikolai, A.

Imaginary (Non-Aristotelian) Logic
Atti del V Congresso Internazionale die Filosofia, Neapel, 1925;

Wajsberg, Mordchaj

Aksjomatyzacja trôjwartŝciowego rachunku zdań
Comptes rendus des sêances de la Sociêtê des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol.24, 1931;

Wang, Hao
A Proof of Independence
American Mathematical Monthly, vol.57, 1950;

Webb, Donald L.

Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in Terms of One Binary Operation
Bulletin of the American Mathematical Society, vol.58, 1936;

Webb, Donald L.

The Algebra of n-Valued Logic
Comptes rendus des sêances de la Sociêtê des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, vol.29, 1936;

Whitehead, Alfred North/Russell, Bertrand

Principia Mathematica
Cambridge, 1950;

Wittgenstein, Ludwig

Tractatus logico-philosophicus, London 1922;

Zinov'ev, Aleksander Aleksandrovich

Two-valûed and Many-valued Logic
Soviet Studies in Philosophy, vol.2, 1963/64.

Lebenslauf

Am 30.9.1953 wurde ich als Tochter des Diplom-Ingenieurs Johannes-Georg Bachmann und dessen Ehefrau Irmgard Gertrud Mathilde Bachmann geb. Ernst gen. Korste in Essen geboren.

Von Ostern 1960 bis Ostern 1964 besuchte ich die Weilenbrinkschule in Bochum. Ostern 1964 wechselte ich zur Hildegardisschule in Bochum über. Dort bestand ich am 15.5.1972 das Abitur. Anschließend nahm ich im Wintersemester 1972/73 das Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Ruhr-Universität in Bochum auf. Am 13.5.1977 bestand ich die erste philologische Staatsprüfung in Mathematik und Physik.

Vom 1.9.1977 bis zum 31.1.1978 arbeitete ich als Lehrkraft im Angestelltenverhältnis an der Hildegardisschule in Bochum. Vom 1.2.1978 bis zum 31.1.1979 leistete ich den Vorbereitungsdienst für das Lehramt an Höheren Schulen in Gelsenkirchen ab. Nachdem ich am 15.1.1979 die zweite philologische Staatsprüfung bestanden hatte, arbeitete ich zunächst wieder als Lehrkraft im Angestelltenverhältnis in Bochum. Am 3.8.1979 wurde ich zur Studienrätin zur Anstellung ernannt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit bin ich Herrn Professor Dr. Menne und Frau Privatdozentin Dr. Neemann zu Dank verpflichtet.

Bochum, den 7.11.1981